No. 108 – Abril 20176 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Los Números y la Teoría de Conjuntos

José Mejía Lacayo

Resumen: introducimos al lector a los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, y las operaciones básicas de los conjuntos. La fuente de este ensayo son artículos diversos en Wikipedia. Cada conjunto de números es una innovación de los conceptos anteriores, como lo es también la teoría de conjuntos.

Palabras claves: Números, sutiabas, Nicaragua, Aristóteles, lógica, inferencia, teoría de conjuntos, operaciones con conjuntos.

«El interés del hombre por los números es tan antiguo como la civilización. Son muchos los pueblos antiguos que se interesaron por los números bien por razones prácticas inmediatas, bien por su relación con la astronomía y el computo del tiempo o incluso asociados a la adivinación y el esoterismo. Entre todos ellos destacan los griegos, que llegaron a desarrollar una teoría de números pura guiada por criterios estrictamente matemáticos en el sentido moderno de la palabra. Los griegos descubrieron las leyes básicas de la aritmética».[1]

En lo que sería Nicaragua, no hay ninguna evidencia de que tuvieran signos para los números o de que usaran un sistema de valor relativo para escribir los números. La única referencia en Oviedo sobre el sistema de numeración está inmediatamente después de los nombres de los días y dice

"Un año ¿quantos dias tiene entre vosotros?

Tiene diez çempuales é cada çempual es veynte dias, y esta es nuestra cuenta y no por lunas."

Al contar por cempuales, se cuenta por veintenas. Diez cempuales daría un año de 200 días que se supone es un error de transcripción porque la respuesta correcta debería ser 18 cempuales y no 10. Pero lo interesante es que parece indicar que se usaba, entre los nicaraos como lo era en Mesoamérica, una base vigésimal para contar.

También entre los Sutiaba pareciera que usaban un sistema vigesimal, o al menos mixto. Squier[2] recoge un vocabulario en que hay una palabra simple para el número 10

[1] Carlos Ivorra Castillo. Teoría de Números. Visitado el 16 de febrero de 2017.

[2] Véase Squier, E.G., *Observations on the Archaeology and Ethnology of Nicaragua*, Labyrinthos, Culver City, 1990 y Lehmann, W., *Die Sprachen Zentral-Amerikas*, Ernst Vohsen, Berlin, 1920

(*guha*) y otra para el 20 (*diño*, *imbadiño*, o *badiño*). Los demás números se nombran siguiendo un sistema mixto decimal y vigesimal. Puede que ya en el siglo XIX, por influencia

1	imba	11	gua-n-imba	21	ba-diño-imba-nu
2	apu	12	gua-n-apu	22	ba-diño-apu-nu
3	asu	13	gua-n-asu	23	ba-diño-asu-nu
4	acu	14	gua-n-acu		
5	huisu	15	gua-n-isu		
6	mahu	16	gua-n-mahu		
7	niquinu	17	gua-n-quinu		
8	nuha	18	gua-[n]-nuha		
9	melnu	19	gua-n-melnu		
10	guha	20	diño, imba-diño, o ba-diño		

del sistema de numeración decimal español, se usara el sistema mixto. Veamos

La base mixta (10 y 20) para número más grandes es también clara.

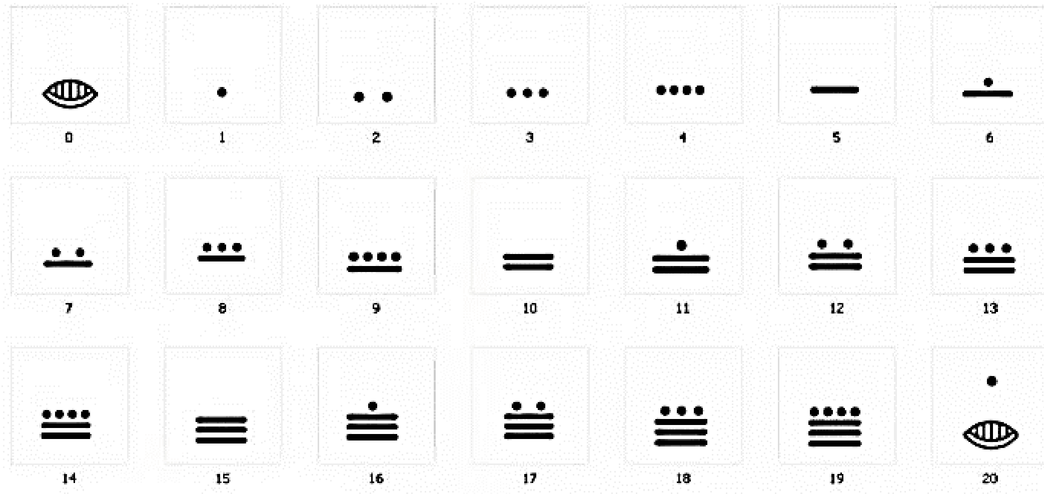
70	asu-diño-guha-nu	(3x20+10)
80	acu-diño	(4x20)
90	acu-diño-guha-nu	(4x20+10)
100	huisu-diño	(5x20), también diño-amba (gran 10)
200	guaha-diño	(10x20)
400	diño-amba	(gran 20)
1000	guha-isu-diño	(10x5x20)
2000	huisu-diño-amba	(5x gran 20)
4000	guha-diño-amba	(10x gran 20)

El nombre de los números mayores de 10, implica un conocimiento de las operaciones aritméticas elementales, adición y multiplicación. No podemos deducir nada de la substracción y división, y tampoco tenemos conocimiento que conocieran los números racionales.

No se puede concluir nada sobre la lengua chorotega porque solo disponemos de nombres para el 1, 2, 3, 4, 5, y 10.

Para la escritura de los números debemos recurrir a los glifos mayas.

No. 108 – Abril 20176 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/



La lógica es una ciencia formal que estudia los principios de la demostración y la inferencia válida. La teoría de conjuntos es un sub-campo de la lógica matemática y queremos popularizarla como primera parte antes de introducir al lector a los teoremas de Gödel que aplican a la aritmética, e introducirlo a las geometrías no euclidianas.

La lógica aristotélica es la lógica basada en los trabajos del filósofo griego Aristóteles, quien es ampliamente reconocido como el padre fundador de la lógica. Sus trabajos principales sobre la materia tradicionalmente se agrupan bajo el nombre Órganon («herramienta»), y constituyen la primera investigación sistemática acerca de los principios del razonamiento válido o correcto. Para Aristóteles, la lógica era una herramienta necesaria para adentrarse en el mundo de la filosofía y la ciencia. Sus propuestas ejercieron una influencia sin par durante más de dos milenios, a tal punto que, en el siglo XVIII, Immanuel Kant llegó a afirmar: «Que desde los tiempos más tempranos la lógica ha transitado por un camino seguro puede verse a partir del hecho de que desde la época de Aristóteles no ha dado un sólo paso atrás. [...] Lo que es aún más notable acerca de la lógica es que hasta ahora tampoco ha podido dar un sólo paso hacia adelante, y por lo tanto parece a todas luces terminada y completa».[3]

Así como el objeto de estudio tradicional de la química es la materia, y el de la biología la vida, el de la lógica es la inferencia. La inferencia es el proceso por el cual se derivan conclusiones a partir de premisas. La lógica investiga los fundamentos por los cuales algunas inferencias son aceptables, y otras no. Cuando una inferencia es aceptable, lo es por su estructura lógica, y no por el

[3] Crítica de la razón pura, B, VII

contenido específico del argumento o el lenguaje utilizado. Por esta razón la lógica se considera una ciencia formal, como la matemática, en vez de una ciencia empírica.

Quisiera traer a Kant en mi ayuda. Aunque su *Crítica de la razón pura* haya sido superada, algunos de sus argumentos ayudan a la imaginación. Dice Kant que las proposiciones propiamente matemáticas son siempre juicios sintéticos a priori y no empíricos, pues llevan consigo necesidad, la cual no puede ser derivada de la experiencia. En filosofía, se denomina sintético a aquel juicio en el que el predicado no está incluido en la noción de sujeto, es decir, aquel juicio que tiene la capacidad de añadir algo al contenido semántico del sujeto. Estos juicios son informativos y extensivos, lo que quiere decir que posibilitan la ampliación de nuestro conocimiento sobre el mundo. A priori, en un sentido puro, son los juicios cuya verdad puede ser mantenida independiente de cualquier experiencia, por lo que concluimos que no procede de ella. (por ejemplo, todo triángulo tiene tres lados), los juicios a priori son de carácter necesario y universal en un sentido estricto.

«La matemática ha marchado por el camino seguro de una ciencia, desde los tiempos más remotos que alcanza la historia de la razón humana, en el admirable pueblo griego... ...El primero que demostró el triángulo isósceles (háyase llamado Thales o como se quiera), percibió una luz nueva; pues encontró que no tenía que inquirir lo que veía en la figura o aún en el mero concepto de ella y por decirlo así aprender de ella sus propiedades, sino que tenía que producirla, por medio de lo que, según conceptos, él mismo había pensado y expuesto en ella a priori (por construcción), y que para saber seguramente algo a priori, no debía atribuir nada a la cosa, a no ser lo que se sigue necesariamente de aquello que él mismo, conformemente a su concepto, hubiese puesto en ella».[4]

La lógica matemática es parte de la lógica y de la matemática, y consiste en el estudio matemático de la lógica, y en la aplicación de dicho estudio a otras áreas de la matemática y de las ciencias. La lógica matemática tiene estrechas conexiones con las ciencias de la computación y con la lógica filosófica. La lógica matemática no es la «lógica de las matemáticas» sino la «matemática de la lógica». Incluye aquellas partes de la lógica que pueden ser modeladas y estudiadas matemáticamente. La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican o definen nociones intuitivas de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones, y algoritmos, utilizando un lenguaje formal. La lógica matemática suele dividirse en cuatro subcampos: teoría de modelos, teoría de la demostración, teoría de conjuntos y teoría de la recursión. La investigación en lógica matemática ha jugado un papel fundamental en el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Actualmente

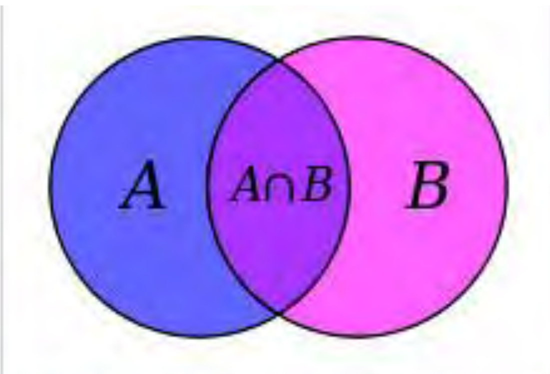
[4] Kant, Inmanuel. Crítica de la razón pura. Accedido el 15 de febrero de 2017.

No. 108 – Abril 20176 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

se usan indiferentemente como sinónimos las expresiones: lógica simbólica (o logística), lógica matemática, lógica teorética y lógica formal.

El desarrollo histórico de la teoría de conjuntos se atribuye a Georg Cantor, que comenzó a investigar cuestiones conjuntistas «puras» del infinito en la segunda mitad del siglo XIX, precedido por algunas ideas de Bernhard Bolzano e influido por Richard Dedekind. El descubrimiento de las paradojas de la teoría cantoriana de conjuntos, formalizada por Gottlob Frege, propició los trabajos de Bertrand Russell, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel y otros a principios del siglo XX.

La teoría de conjuntos más elemental es una de las herramientas básicas del lenguaje matemático. Dados unos elementos, unos objetos matemáticos como números o polígonos, por ejemplo, puede imaginarse una colección determinada de estos objetos, un conjunto. Cada uno de estos elementos pertenece al conjunto, y esta noción de pertenencia es la relación relativa a conjuntos más básica.

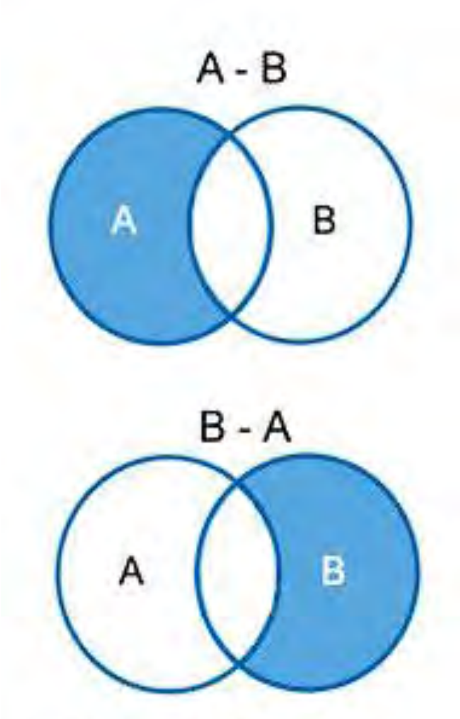


Un diagrama de Venn que ilustra la intersección de dos conjuntos.

Los conjuntos numéricos usuales en matemáticas son: el conjunto de los números naturales N, el de los números enteros Z, el de los números racionales Q, el de los números reales R y el de los números complejos C. Cada uno es subconjunto del siguiente. El conjunto de números naturales N está formado por los números N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...} hasta el infinito.

Los números enteros Z son un conjunto numérico que contiene los números naturales, los enteros negativos y el cero. Los enteros negativos, como −1 o −3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo «más» delante de los positivos: +1, +5, etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo. El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra Z = {..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, ...}.

Número racional Q es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros o, más precisamente, un entero y un natural positivo; es decir, una fracción común {a/b} con numerador {a} y denominador {b} distinto de cero. La escritura decimal de un número racional es, o bien un



Diferencia de conjuntos

número decimal finito, o bien periódico. Por ejemplo, ¾ es un número racional finito porque e cociente es 0.75; mientras que 3/11 = 0.272727...es un número racional periódico, donde el período (la parte que se repite indefinidamente) es 27.

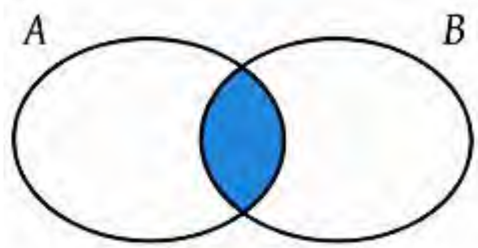
En matemáticas, un número irracional es un número que no puede ser expresado, como una fracción **m/n**, donde m y n sean enteros y n sea diferente de cero. Un decimal infinito (es decir, con infinitas cifras) aperiódico, como √7 = 2,645751311064591 no puede representar un número racional. A tales números se les nombra "números irracionales". Esta denominación significa la imposibilidad de representar dicho número como razón de dos números enteros.

El conjunto de números reales (denotado por R) incluye tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales y trascendentes. Los irracionales y los trascendentes no se pueden expresar mediante una fracción de dos enteros con denominador no nulo; tienen infinitas cifras decimales aperiódicas, tales como: √5, el número real log(2), cuya trascendencia fue enunciada por Euler en el siglo XVIII. Por ejemplo, √5 = 2.23606797749979... es irracional porque tiene infinitas cifras decimales aperiódicas.

Un número trascendente, es un número real que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos. Un número real trascendente no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Tampoco es un número racional, ya que estos resuelven ecuaciones algebraicas de primer grado, al ser real y no ser racional, necesariamente, es un número irracional. La definición no proviene de una simple relación algebraica, sino que se define como una propiedad fundamental de las matemáticas. Los números trascendentes más conocidos son **п** (pi) y e, donde **п** es el número 3,14159265358979323846...que todos conocemos desde que calculamos la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo; y e es aproximadamente igual a 2.718281828459045235360... y es la base de los logaritmos naturales y figura en fórmulas del interés compuesto.

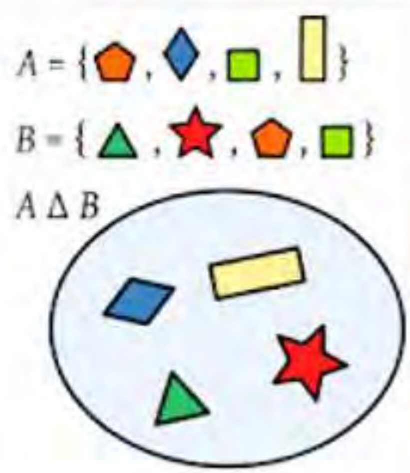
No. 108 – Abril 20176 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Los números complejos C son una extensión de los números reales y forman el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado. El conjunto de los números complejos se designa con la notación {C}. Los números complejos incluyen todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales. Todo número complejo puede representarse como la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra {C}. Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, análisis, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, ecuaciones diferenciales, facilitación de cálculo de integrales, en aerodinámica, hidrodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Además, los números complejos se utilizan por doquier en matemáticas, en muchos campos de la física (notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.



Intersección e A y B

Para ilustrar al lector sobre los conjuntos, lo mejor es usar la familia como ejemplo. Mi esposa y yo, y mis hijos formamos un conjunto que llamaremos A. Mi hijo mayor se va a casar con una joven de la familia B. El día del compromiso matrimonial nos reunimos ambas familias (conjuntos A y B). Esta operación que en el lenguaje coloquial llamamos "reunión" se llama "unión" en la operación de conjuntos. El día que se case mi hijo {p} con la joven {l} ellos pasaran a formar parte de ambas familias. Mi nuera será parte de mi familia, parte de conjunto A y mi hijo parte de la familia de mi nuera, parte del conjunto B. En operación de conjuntos, ellos son la "intersección de los conjuntos A y B.

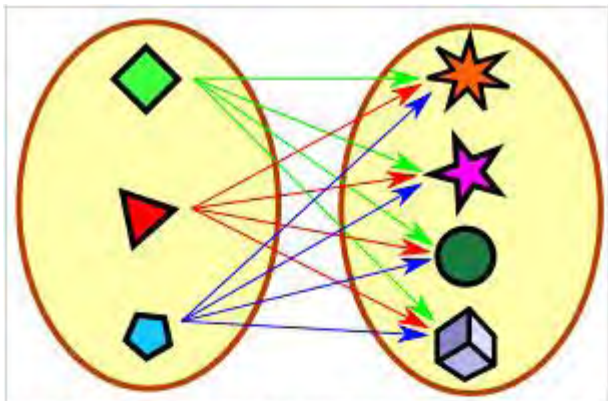


Diferencia simétrica

Una vez casados {p} y {l} establecerán su propia familia que llamaremos conjunto C, que pronto estará constituida por mi hijo, mi nuera y mis nietos.

La diferencia A-B sería todos los miembros de mi familia, dejando por fuera a mi nuera porque ella pertenece al conjunto B. Todos los miembros del conjunto

A son nicaragüenses, mientras que los del conjunto B son estadounidenses. En el conjunto A, que incluye a mi nuera, el complemento de A tiene un solo miembro, mi nuera porque ella no pertenece al conjunto de referencia, los nicaragüenses.



Producto cartesiano de conjuntos

La diferencia simétrica de dos conjuntos es una operación que resulta en otro conjunto cuyos elementos son aquellos que pertenecen a alguno de los conjuntos iniciales, sin pertenecer a ambos a la vez. En nuestro ejemplo, la diferencia simétrica de A y B sería un tercer conjunto formado por las dos familias, excepto mi hijo y mi nuera, porque mi hijo pertenece al conjunto A (m familia) y mi nuera al conjunto B (su familia).

Finalmente, el producto cartesiano lo podemos explicar partiendo de un conjunto de jóvenes V {a, b, c) y uno de muchachas M (n, p, q) y concertamos una cita de cada uno de los varones de A con cada una de las muchachas de M. Los pares posibles son (a, n)., (a, p), (a, q); (b, n), (b, p), (b, q); (c, n), (c. p) y (c, q). Estas parejas formarían el conjunto A x B, el producto cartesiano.

Estas operaciones básicas permiten manipular los conjuntos y sus elementos, similares a las operaciones aritméticas, constituyendo el álgebra de conjuntos, que se pueden resumir como sigue:

Unión. La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto A ∪ B que contiene cada elemento que está por lo menos en uno de ellos.

Intersección. La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto A ∩ B que contiene todos los elementos comunes de A y B.

Diferencia. La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto A \ B que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Complemento. El complemento de un conjunto A es el conjunto A∁ que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A.

Diferencia simétrica. La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto A Δ B con todos los elementos que pertenecen, o bien a A, o bien a B, pero no a ambos a la vez.

Producto cartesiano. El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto A × B que contiene todos los pares ordenados (a, b) cuyo primer

No. 108 – Abril 20176 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

elemento a pertenece a A y su segundo elemento b pertenece a B. Por ejemplo, (a, b) x (c, d) = (a, c), (a, d), (b, c), (b, d).■