Relatividad General

George Cuevas

Resumen: Comenzamos a enunciar los conceptos básicos de la relatividad General. Hablamos ahora de un espacio curvo en el cual vamos a acomodar también el movimiento Lorentzeano que tiene geometría plana (pero no Euclidiana). Introducimos el tensor métrico Lorentzeano y usamos este tensor como punto de partida para explicar cómo cambian los elementos de dicho tensor para acomodar los efectos de gravedad. Introducimos el concepto de curvatura y explicamos como es posible relacionar la curvatura del ambiente con la masa/energía local. Introducimos el Tensor de Ricci y relacionamos este Tensor con el principio Newtoniano de aceleración de reducción de volumen. Introducimos el Tensor de Energía-Momento y explicamos la ley de conservación del Mom-energia. Finalmente introducimos la ecuación de campo gravitacional de Einstein y explicamos como la aceleración de reducción de volumen significa curvatura del espacio.

Palabras Clave: Tensor métrico, curvatura, geodésico, tensor de energía-momento, conservación de momento-energía, aceleración de reducción de volumen, derivativa, Tensor de Ricci.

Abstract: We start with definition of basic concepts that are used in General Relativity. We say that we need to define a curved space in which we can accommodate gravitational effects. We hope that this curved space can accommodate also the Lorentzian framework of Special Relativity. We introduce the Metric Tensor of Special Relativity and use this tensor as point of departure to explain how the elements of this tensor would change when gravity is present. We then introduce the concept of curvature and explain how the local curvature can be related to the local mass. Ricci Tensor is then introduced and an expression is found for the acceleration of volume reduction. The Stress-Energy Tensor is introduced as well as the principle of energy-momentum conservation. We show how the acceleration of volume reduction is related to the local mass and in this manner we introduce Einstein's field equation.

Key Words: Metric Tensor, curvature, geodesic, Stress-Energy Tensor, Conservation of Mom energy, acceleration of reduction of volume, derivative, Ricci Tensor

No. 114 – octubre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Breve Repaso. Hemos visto que usando una familia de marcos de referencia inerciales es posible describir un fenómeno por medio del intervalo de tiempo-espacio. Las coordinadas de cada marco Lorentzeano están relacionadas por medio de las transformaciones de Lorentz. También cada marco lleva velocidad constante y rectilínea con respecto al sistema primordial.

Estudiamos el efecto de aceleración y con ello consideramos el efecto de gravedad. Vimos que la presencia de gravedad se manifiesta por medio de "efectos de marea." Efectos de marea consiste en deformación y la ley de conservación del Mom energía (efecto local) dicta que el volumen se conserve. Hablamos de un nuevo tipo de movimiento inercial que consiste en caída libre y el fenómeno de caída libre nos permite eliminar el efecto de gravedad.

El principio de equivalencia nos dice que adentro de un marco de referencia en donde partículas están sujetas a aceleración común y uniforme no es posible distinguir entre las dos posibilidades:

La aceleración se debe a un campo gravitacional que existe adentro de los confines de dicho marco

La aceleración se debe a una fuerza externa que es aplicada a dicho marco.

Cuando hay efectos de gravedad, el estudio de movimiento de partículas es mas simple si se usan marcos inerciales que van en caída libre. Aquí el movimiento es rectilíneo y homogéneo con tal de que se limite el tamaño de dichos marcos. Tan pronto como se noten efectos de marea hay que restringir el tamaño. También la falla en homogeneidad del campo gravitacional causa problemas cuando se compara la dirección y apunte de la velocidad de un marco a otro. De manera que estos marcos se consideran como marcos locales.

La falla en homogeneidad de dirección de estos marcos locales se debe a la curvatura del espacio-tiempo. Por esta misma razón no es posible cubrir 100% del campo gravitacional de un cuerpo masivo (por ejemplo, la tierra, luna o el sol) con un sencillo marco. Es así que nos dimos cuenta que la Geometría Lorentzeana (Relatividad Especial) no se puede usar para dar una explicación global de los efectos de gravedad. Por esta misma razón necesitamos considerar espacios curvos (incluyendo tiempo)

En cambio, es posible acomodar la rama de fenómenos electromagnéticos en la relatividad especial. Solamente es necesario escribir la leyes de Maxwell usando tensores (Maxwell field tensors). Esta tarea la llevo a cabo Einstein. Lo que quiero decir es que en este caso no hubo necesidad de recurrir a la curvatura del espacio-tiempo.

© George Cuevas – geo.wain@verizon.net

Introducción. Nuestra excursión adentro de la relatividad general va a ser breve y ligera. Voy a evitar derivaciones y calculaciones que son tediosas y rigurosas. Voy a explicar los conceptos, leyes, normas, métodos etc. de manera descriptiva y sencilla.

Después de publicar su teoría de Relatividad Especial (1905), le tomo al Señor Einstein 10 años para desarrollar su teoría de Relatividad General (1915). Albert Einstein tenía a su disposición la Geometría Diferencial, el Cálculo Diferencial, La Geometría de Riemann, etc. De manera que para presentar este tema de manera completa hay que tener amplio conocimiento de estas ciencias. Sin embargo, espero que un paseo ligero en estos campos pueda abastecer a los lectores con un entendimiento suficiente para comprender mas a fondo la naturaleza y para despertar cierta curiosidad e interés en las ciencias Físicas. La ruta que vamos a seguir es:

Vamos a explicar primero el Tensor Métrico. Los elementos que integran dicho tensor son los coeficientes de las coordinadas de espacio. Estos coeficientes pueden ser números de constante valor o pueden funciones algebraicas de las coordinadas.

Vamos a explicar el concepto de curvas Geodésicas y al mismo tiempo explicar como estas curvas representan las líneas rectas del espacio Lorentzeano

Vamos a explicar el concepto de "Transporte Paralelo de Vectores" usando las curvas geodésicas

Vamos a explicar el concepto de curvatura y también vamos a explicar cómo se calcula.

Vamos a introducir el concepto de "Tensor de Energía y Momento" (Mom-energía) y con ello vamos a explicar las leyes de conservación.

Vamos a introducir la famosa "Ecuación del Campo Gravitacional de Einstein" en la cual relaciona la curvatura de espacio-tiempo con la densidad de energía y momento (masa es equivalente a energía.

Vamos a introducir la Métrica de Schwarzschild y como ejemplo vamos a presentar la solución del problema de orbitas planetarias. Después vamos a comparar la solución de Einstein con la solución de Newton.

La Métrica. Comenzamos con la fórmula de la distancia del intervalo de tiempo-espacio:

(Distancia del intervalo)^2 = s^2 = [(separación en tiempo, (metros)]^2 – (separación en espacio)^2 .

$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$. (Formula 8a)

En Formula 8 hemos usado el símbolo "Δ" para denotar que nos referimos a un incremento. De ahora en adelante vamos a usar el mismo sistema de

No. 114 – octubre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

símbolos del cálculo diferencial. Vamos a cambiar Formula 8 usando la letra "d" en lugar de "Δ." Este cambio denota que el incremento es infinitesimal. De manera que Formula 8 se expresa de ahora en adelante de esta forma: $(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$. Este polinomio representa la métrica de la Relatividad Especial y también se llama Métrica del espacio Lorentzeano.

$$\mathbf{(d\tau)}^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2 \qquad \text{(Formula 8b)}$$

Favor de notar lo siguiente:

El polinomio consiste en la suma del cuadrado del incremento infinitesimal de las 4 coordinadas

El valor (implícito) de los coeficientes que multiplican cada termino es unidad. Por esta razón decimos que los coeficientes son fijos (constantes) que no dependen de las coordinadas

La métrica no es un vector, pero si representa el valor numérico del cuadrado de la longitud del vector (dt, dx, dy, dz).

El sistema de coordinadas es el sistema cartesiano de coordinadas rectangulares.

Los términos de esta métrica están separados por signos de suma y de sustracción. Quiere decir que la métrica puede ser positiva, negativa y puede ser de valor nulo también (valor nulo quiere decir valor cero).

La estructura algebraica de la Métrica consiste en una suma de cuadrados. La métrica se escribe también como el producto (triple producto) de un tensor multiplicado por el vector que corresponde al intervalo y también multiplicado por el transpuesto del mismo vector. Los elementos del tensor son los coeficientes (= ±1) de la suma de cuadrados.

$$[dt \quad dx \quad dy \quad dz] \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{matrix}\right| = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$$

Longitud del Intervalo)^2 = (Transpuesto del Intervalo) X (Tensor Métrico) X (Intervalo).

Simplemente se escribe: $(d\tau)^2 = (V^T).\ (M).\ (V) = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$
En donde V es el vector que representa el intervalo
M es el tensor métrico. En palabras sencillas, es un doble vector que se representa

por medio de una matriz. El orden de un tensor es el número de índices. El tensor Métrico es de segundo orden

V^T es el transpuesto del mismo vector que representa el intervalo. El transpuesto de un vector es el mismo vector con excepción de que las componentes están arregladas en forma de línea en lugar de forma de columna.

Vamos a demostrar el proceso algebraico de multiplicación de un tensor por un vector. Esta demostración la hacemos no con el propósito de aprender el algebra de tensores. Lo hacemos únicamente para señalar la importancia del tensor métrico e indicar como dicho tensor captura la esencia del espacio que representa.

Por ejemplo, el hecho de que los elementos del tensor métrico son constates (de fijo valor) nos dice que el espacio es plano y Riemanniano. El hecho de que algunos de los elementos son negativos nos dice que el valor de la métrica (el polinomio) puede ser cero, positivo o negativo. Mas adelante vamos a señalar otras propiedades del tensor métrico.

Primero vamos a multiplicar el Tensor M por el Vector V. El proceso algebraico consiste en multiplicar y sumar cada línea del tensor por la columna que representa el vector. El resultado es otro vector arreglado en forma de columna: De esta manera (M). (V) es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dt + 0 + 0 + 0 = dt \\ 0 - dx + 0 + 0 = -dx \\ 0 + 0 - dy + 0 = -dy \\ 0 + 0 + 0 - dz = -dz \end{vmatrix}$$

Para completar la triple multiplicación ahora multiplicamos el transpuesto (V^T) por el producto (M.V):

$$[dt \quad dx \quad dy \quad dz] \begin{vmatrix} dt \\ -dx \\ -dy \\ -dz \end{vmatrix} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

El tensor Métrico M tiene 16 componentes arreglados en forma tabular y este arreglo es lo que quiero explicar. Favor de notar lo siguiente:

El tensor Métrico tiene 16 elementos

El tensor métrico es simétrico y los elementos diagonales son unidad (valor =1). El resto de las componentes son cero.

No. 114 – octubre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Generalmente, polinomios que representan formas cuadráticas consisten en 16 términos. Afortunadamente la Métrica del Espacio Lorentzeano es simple y solamente consiste en 4 términos. Dichos términos son el cuadrado de cada coordinada. No hay términos mixtos que resultan de multiplicar dos distintas coordinadas. Por esta razón los elementos laterales son cero. Cada componente del tensor métrico se identifica de acuerdo con su orden de posición:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}$$

Se usan 2 índices que son indicativos de la posición. El primer índice representa el orden linear y el segundo índice representa el orden en la columna. De manera que con respecto al tensor métrico:

$g_{11} = 1$, $g_{22} = -1$, $g_{33} = -1$, $g_{44} = -1$. De otra manera $g_{ij} = 0$ cuando (i, j) no son del mismo valor.

¿Porque le damos tanta atención al tensor métrico? El tensor métrico es sumamente importante porque caracteriza la estructura del espacio que representa.

Curvatura. De acuerdo con lo que dice John Archibald Wheeler, hay un apretón de manos entre la masa y el espacio-tiempo. El espacio-tiempo demanda y gobierna como se mueve la masa y en reacción a este mandato, la masa le dice al espacio-tiempo como curvear. Anteriormente dijimos que: [Medida propia de curvatura del espacio-tiempo] = (constante universal) x (densidad de energía) Ahora vamos a ver cuál es la medida propia de curvatura. Primero vamos ensenar la descripción visual que viene de Roger Penrose "The Road to Reality."

© George Cuevas – geo.wain@verizon.net

Cuando hay confluencia (cruce) de curvas geodésicas, el instrumento adepto para representar este fenómeno es el Tensor de Ricci. Este tensor se deriva del propio Tensor de Riemann por medio de contracción de uno de los 4 índices (el index c): $R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$

Las Figuras 21 y 22 nos dan una idea de cómo es posible usar el tensor de

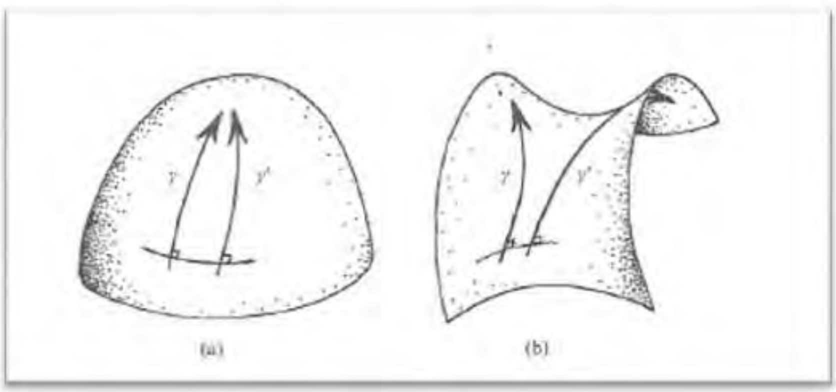

Figure 21. La curvatura del ambiente geometrico induce el acercamiento (a) o la divergencia (b) de geodesicos *Y* y *Y*´que inicialmente eran paralelos. Este fenómeno se conoce como la "deviación geodésica."

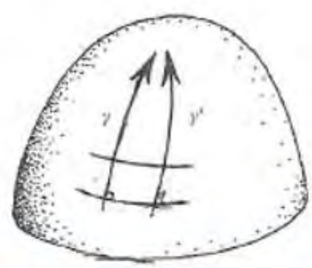

Figure 22. A medida que un observador avanza (va en caída libre) en el geodesico *Y* , el área del cuadrilatero sufre reducción en tamaño (área). Por otra parte, un vector que se desliza paralelamente (a si mismo) en dirección de cada uno de los lados del cuadrilátero y regresa al mismo punto de origen no concide con la dirección original del mismo vector antes del desplazamiento. La diferencia es medida por el tensor de Riemann $R_{abc}{}^{d}$

Ricci para representar y también medir la rapidez con que el cruce o encuentro de 2 geodésicos que inicialmente eran paralelos ocurre. Esto significa también el como medir la curvatura del ambiente geométrico.

¿Como representamos el fenómeno de congruencia (amarre y reducción de espacio)? Comenzamos con la teoría de gravitación Newtoniana que nos dice que *cuando un grupo de masas rodea un volumen que también contiene masa, aquí ocurre una reducción de volumen cuya aceleración inicial es*

No. 114 – octubre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

proporcional a la cantidad de masa contenida en dicho volumen. Si la masa adentro del volumen es M, entonces aceleración (inicial) del ***proceso de reducción de volumen es 4πGM.*** Aquí por supuesto estamos hablando de aceleración en dirección del centro del volumen de masa. Este principio es similar a la ley de Gauss.

Este mismo principio explica como los dos geodésicos vecinos ϒ y ϒ′ aceleran con respecto el uno al otro y esto causa una reducción de volumen en el espacio demarcado por los dos geodésicos. De acuerdo con la ley newtoniana, la aceleración del fenómeno de reducción de volumen es 4πG (δM) en donde δM es la masa contenida en dicho volumen. La cantidad de masa δM la vamos a calcular usando el tensor de energía-momento T_{ab} que vamos a explicar mas adelante.

La curva Geodésica ϒ (sobre la cual va en caída libre nuestro experimentador) lleva como tangente el vector $V_{tiempo\text{-}espacio}$ = (dt/dτ, dx/dτ, dy/dτ, dz/dτ) con la excepción de que estamos hablando del observador primordial y las componentes espaciales son cero. Por esta razón la tangente al geodésico se reduce a la componente temporal. El vector tangente al geodésico es (dt/dτ, 0, 0, 0) y lo vamos a designar con la letra t_a. Los lados del pequeño cuadrilátero en Figura 22 son los vectores tangente a cada geodésico.

La velocidad con que la reducción de volumen ocurre se expresa D(δV) y significa tomar la derivativa de (δV) con respecto al tiempo propio: $[D(\delta V)]^b = \frac{\partial(\delta V)}{\partial s} = t^a \nabla_a (\delta V)^b$

La aceleración con que la reducción de volumen ocurre se expresa D^2 (δV) y significa tomar la doble derivativa con respecto al tiempo propio: $[D^2(\delta V)]^b = t^b \nabla_b [t^a \nabla_a (\delta V)^b]$

$D^2 (\delta V) = R_{ab}\, t^a\, t^b\, (\delta V)$ en donde t^a y tb representan el tiempo propio.

Tenemos ya una expresión que denota la aceleración de reducción de volumen o sea la curvatura con respecto al tiempo propio del observador. Me doy cuenta que he tomado la libertad de confundir a muchos de mis queridos amigos al usar términos con los cuales la mayoría de Uds no reconocen. Pido mil excusas, pero hay que admitir que el Tensor de Ricci y mucho mas, el tensor de curvatura de Riemann son una bestia algebraica a pesar de ser también una de las portentosas bellezas del mundo de las matemáticas. Prometo que más adelante todos estos conceptos van a estar más fáciles de entender.

Ahora preguntamos: ¿Porque se dice que la aceleración de reducción de volumen representa la curvatura del espacio-tiempo? La respuesta la vamos dar más adelante. El siguiente paso que debemos dar es relacionar esta expresión, $D^2(\delta V)$ con la densidad de masa local δM.

El Tensor de Energia y Momento (Momenergia): Vamos a dar una descripción sencilla del tensor de energía y momento. Este tensor está vinculado con las leyes de conservación de energía y de momento. La energía es la componente temporal del vector Momenergia y el momento son las 3 componentes espaciales del Momenergia.

Este es el vector Momenergia $(m\frac{t}{\tau}, m\frac{x}{\tau}, m\frac{y}{\tau}, m\frac{z}{\tau})$

Este es el vector de velocidad del intervalo de tiempo-espacio $V_{\text{tiempo-espacio}}$ = (t/τ, x/τ, y/τ, z/τ)

Con cada componente del vector momenergia debemos asociar un flujo. El flujo es como una corriente: Lleva dirección e intensidad. El Tensor de energía-momento es representado por "T" y lleva 16 componentes.

$$T^{ab} = \begin{vmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{vmatrix}$$

El primer índice denota la componente del mom-energia. El segundo índice denota la dirección del flujo.

Los elementos en la primera línea se refieren a la densidad de energía (masa multiplicada por p^c).

Los elementos en la segunda línea se refieren a la densidad de la componente "x" del moma-energía.

Los elementos en la tercera línea se refieren a la densidad de la componente "y" del mom-energía.

Los elementos en la cuarta línea se refieren a la densidad de la componente "z" del mom-energía.

Las componentes en cada columna denotan la dirección del flujo. Por ejemplo, la primera columna denota flujo a través del tiempo. La segunda columna representa flujo en dirección "x". La tercera columna denota flujo en dirección y, etc.

De esta manera T^{00} corresponde al flujo de energía (o masa) a través del tiempo. T^{ik} denota flujo en la dirección "k" de la componente i" del mom-energia. El tensor es simétrico. Quiere decir que $T^{ik} = T^{ki}$.

La componente T^{ii} denota tensión mecánica normal (fueza por unidad de longitud o área).

No. 114 – octubre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Por supuesto, si el volumen incluye energía electromagnética, hay que incluir las componentes del tensor de energía de Maxwell. De manera que todas las leyes de conservación de energía y momento aplican también a la energía electromagnética.

Las Leyes de Conservación de Energía y Momento. Las leyes de conservación del Momenergía se pueden enunciar usando el Tensor de Energía y Momento. La ley de conservación es

$$\nabla_b T^{ab} = \frac{\delta T^{ab}}{\delta x^b} \underline{\underline{= \mathbf{0}}} = \frac{\delta T^{tt}}{\delta t} + \frac{\delta T^{tx}}{\delta x} + \frac{\delta T^{ty}}{\delta y} + \frac{\delta T^{tz}}{\delta z}$$

Debo explicar los símbolos matemáticos. Aquí tenemos una fracción. Esta fracción viene del cálculo diferencial y se conoce como la "derivativa con respecto a cada coordinada." El símbolo ∇_b es un operador y representa la operación de calcular la derivativa con respecto a las coordinadas (t, x, y, z). El espacio-tiempo tiene 4 coordinadas y entonces estamos hablando de 4 derivativas. Cada derivativa representa la relación fraccional entre el numerador y el numerador. Cada fracción nos dice que por cada unidad que el denominador cambia (puede aumentar o disminuir), el numerador también aumenta o disminuye de acuerdo con el valor de la fracción. Por ejemplo, si la fracción lleva el valor de "4", quiere decir que un aumento de 1 unidad en el denominador causa que el numerador se cuádruple. Esta expresión matemática es como una taza de cambio. Entonces $\nabla_b T^{ab}$ representa la variación en valor total de T^{ab} debido a variación de cada una de sus coordinadas.

En el caso de la ley de conservación, dicha ley nos dice que el denominador puede cambiar, pero el numerador no cambia y conserva el mismo valor. Favor de notar que en el primer término el índice "b" se repite en el numerador y en el denominador. Esto significa que "b" toma el valor de t, x, y, z (hay que sumar). En cambio, "a" toma el valor de "t" únicamente.

La ley de conservación viene de la Física Clásica y nos dice que adentro de un volumen (en el cual no hay fuentes ni medios disipativos) la masa se conserva, es decir, la masa (así como la energía) no se puede crear ni se puede tampoco destruir. Este principio lo vamos a usar para enunciar la ecuación de Einstein del tiempo-espacio.

La Ecuación del Tiempo-Espacio de Einstein. reducción de volumen es R_{ab} t^a t^b (δV). El flujo de la densidad de energía que escapa a través del tiempo (a medida que el observador avanza en el geodésico) es representado usando el tensor de energía-momento. Este flujo de energía es representado por la componente T^{00} en el marco de referencia primordial que es

$T_{ab}\ t^a\ t^b$. De manera que la masa local que el observador mide (δM) adentro del cuadrilátero entre los 2 geodésicos es densidad multiplicada por el volumen, $\delta M = T_{ab}\ t^a\ t^b\ (\delta V)$.

A medida que el tiempo transcurre, el observador nota que los dos geodésicos aceleran y se aproximan con respecto el uno al otro. De acuerdo con la ley de Newton, dicha acceleracion es $-4\pi G\ \delta M$. El signo negativo se debe a que la separación se reduce.

Acceleracion $= -4\pi G\ \delta M = -4\pi G\ T_{ab}\ t^a\ t^b\ (\delta V) = R_{ab}\ t^a\ t^b\ (\delta V)$. Esta aceleración lateral es similar a la (1 milímetro) que medimos anteriormente cuando estudiamos los balines en caída libre durante 8 segundos!

Quiere decir entonces que $\boxed{R_{ab} = -4\pi G\ T_{ab}\ .}$

Esta es la fórmula que relaciona la curvatura del tiempo-espacio con la masa local. Esta fue la fórmula que Einstein propuso inicialmente. Sin embargo, lleva el problema de que cuando aplicamos la ley de conservación de masa-energía $\nabla_b T^{ab} = 0$, esta acción lleva implícita la idea de que también $\nabla_a R^{ab} = 0$ cuando en realidad $\nabla_a R^{ab} = \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a R$.

Es posible entonces decir que $\nabla_a \left(R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R \right) = 0$

Einstein resolvió el problema con el uso del nuevo tensor "G" que no es nada mas que la expresión adentro del paréntesis después de ajustar los índices: $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$. Usando esta nueva definición, la ecuación del tiempo-espacio de Einstein llega a ser:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -8\pi G T_{ab} \qquad \textbf{Formula 18}$$

Favor de no confundir la constante *G* en Formula 18 con el Tensor G cuyas componentes son designadas como G_{ab}. La componente g_{ab} del tensor métrico aparece en fórmula 18. El Tensor G se conoce como el Tensor de Einstein.

Notas acerca del Tensor de Ricci. Ahora ya podemos explicar el porqué la aceleración de reducción de volumen es indicativa de la curvatura del espacio. Antes de proceder con esta explicación, quiero añadir que cuando hablamos de la relatividad general y nos referimos al espacio, aquí implícitamente incluimos la coordinada de tiempo. Espacio y tiempo son inseparables. También hay que notar que las trayectorias son curvas geodésicas. La curva geodésica representa como el tiempo propio se desarrolla en relación al espacio. También hay que reconocer que el espacio es curvo y el cuadrivector $(t/\tau,\ x/\tau,\ y/\tau,\ z/\tau) = V_{\text{tiempo-espacio}}$ es tangente al geodésico. Quiere decir que la tangente del geodésico apunta en dirección a la línea del mundo. El eje del tiempo es como una fibra que se extiende a través de series de capciones (copias) del mundo tridimensional. La fibra del eje del tiempo conecta la serie de instantáneas imagines (copias) del mundo de 3 dimensiones de la misma manera como un proyector de cinema proyecta una serie de imágenes en la pantalla. Cada imagen representa el estado del mundo físico en un determinado intervalo de tiempo. Debo decir además que en cada punto de la trayectoria se pueden construir conos del futuro. Los geodésicos atraviesan el espacio adentro de los conos si pertenecen a partículas que tienen masa. Los geodésicos que corresponden a rayos de radiación electromagnética (la luz) se llaman "geodésicos nulos" y viajan en las paredes de los conos.

Vamos a ilustrar lo que significa aceleración de reducción de volumen usando el pequeño cuadrilátero en la Figura 22. Nos vamos a referir a $[D^2(\delta V)]^b$ = $t^b\nabla_b$ $[t^a\nabla_a(\delta V)^b]$ como un código que ejecuta operaciones geométricas y operaciones de cálculo diferencial, por ejemplo, tomar derivativas con el fin de llevar a cabo la reducción de volumen. La ejecución de este código mientras el observador va en caída libre en medio de los dos geodésicos ϒ y ϒ′ va a resultar en cambio de dirección de las líneas tangentes y aproximación mutua de las 2 curvas hasta alcanzar cruce y con ello la reducción del espacio entre las 2 curvas El algoritmo (la instrucción) que va programado representa la ejecución de $[D^2(\delta V)]^b$.

Calcular el producto de la longitud del lado izquierdo multiplicado por la longitud del lado superior = A

Calcular el producto de la longitud del lado inferior multiplicado por la longitud del lado derecho = B

Calcular A – B

El valor de A – B debe ser igual al valor de la masa contenida adentro del cuadrilátero = (δM).

Ajustar (reducir) el tamaño del lado superior del cuadrilátero de manera que A – B = (δM)

Ajustar la distancia (separación) de los geodésicos ϒ y ϒ′ de manera que coincidan con los lados del cuadrilátero

Repetir esta operación hasta el consumo del cuadrilátero (hasta completar la reducción de volumen).

Las instrucciones son simples: Implementar el código de la ecuación de Einstein. Siempre que hay masa adentro del cuadrilátero hay que reducir el tamaño del lado superior del y cuadrilátero y hay que ajustar la dirección de los

© George Cuevas – geo.wain@verizon.net

geodésicos de manera que coincidan con los lados. Hay que tomar en cuenta que el tensor de Ricci transforma las tangentes. Las hace cambiar de dirección de acuerdo con la cantidad de masa que hay adentro el cuadrilátero. Por favor tomen en cuenta que las tangentes del geodésico son los timones del mismo geodésico y determinan rumbo y dirección. Esto, ¡mis queridos amigos es la curvatura del espacio!

Como dice John Archibald Wheeler, la masa en el cuadrilátero le dice a los geodésicos como cambiar la dirección y los geodésicos le dicen a la masa como moverse.

Hasta aquí llegamos por el momento. En el próximo capítulo vamos a explicar los siguientes temas:

¿Que son las curvas geodésicas? ¿Como se calculan?

¿Cuáles son los Símbolos de Christoffel? ¿Que papel desempeñan? ¿Como se calculan?

La ecuación de movimiento

¿Cuál es la métrica del espacio vacío? ¿Cuál es la métrica cuando hay masa? La métrica de Schwarzschild

Breve descripción de orbitas planetarias. Comparación a las fórmulas de Newton.

COMENTARIOS FINALES

Manténganse en sintonía con nosotros.

NOTAS

[1] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. – *Spacetime Physics*. Second Edition. W. H. Freeman. New York 1992

[2] Roger Penrose. *The Road to Reality*. – Published by Vintage Books, A division of Random House Inc. New York

Nota 1: Las Figuras 21 y 22 vienen de Referencia [2] *The Road to Reality*