

El Radio de la Tierra, un Ejemplo de Laboratorio de Matemáticas

José Mejía Lacayo

Nuestros estudiantes rechazan las matemáticas más que ninguna otra asignatura de secundaria. Todas las otras asignaturas parecen tener aplicaciones prácticas; en español el profesor pide a sus alumnos que escriban ensayos, en geografía aprenden a localizar sobre el mapa ciudades, ríos y montañas; la historia se puede enseñar como quien narra un cuento; la química tiene su laboratorio donde se puede jugar con reacciones químicas y generar gases coloreados, llenar globos de hidrógeno.

En cambio, las matemáticas se estudian haciendo ejemplos abstractos sobre la pizarra o el papel; no parece tener aplicaciones prácticas más allá de las tablas de multiplicar y el saber contar. Me pregunto si es posible inventar un laboratorio de matemáticas, donde el alumno aprenda aplicaciones prácticas.

Construir un reloj de sol es barato y enseña al alumno los movimientos de la Tierra respecto al Sol, es, además, como una introducción a la astronomía. Calcular la altura de un poste midiendo las sombras, es otro proyecto barato. **Estudiar los números primos usando la "criba de Eratóstenes" es otro ejemplo sencillo y barato.**

Hoy quiero centrarme en algo más pretencioso e importante: calcular la circunferencia de la Tierra, y por tanto, calcular su radio. El griego Eratóstenes pudo calcularlo hacia en el siglo III antes de Cristo. Todo lo que se necesita es un palo y medir la sombra que proyecta el palo cuando el sol está en el cenit.

Los movimientos del sol son fáciles de detectar, hasta por razones prácticas; mis tías abuelas sabían que se podían sentar en la esquina noroeste del corredor en ciertos meses del año, y en otros meses en la esquina suroeste. Mi nieta de cinco años preguntó a su mamá porque el largo de su sombra cambiaba. Así, casi todos los pueblos aborígenes tenían calendarios y fiestas para celebrar los solsticios y equinoccios.

Los solsticios (del latín solstitium (sol sistere), "Sol quieto") son los momentos del año en los que el Sol alcanza su mayor o menor altura aparente en el cielo, y la duración del día o de la noche son las máximas del año, respectivamente. Astronómicamente, los solsticios son los momentos en los que el Sol alcanza la máxima **declinación norte (+23° 27')** o **sur (-23° 27')** con respecto al ecuador terrestre.

En el solsticio de verano en el hemisferio norte el Sol alcanza el cenit al mediodía sobre el trópico de Cáncer y en el solsticio de invierno alcanza el cenit al mediodía sobre el trópico de Capricornio. Es un fenómeno registrado desde la antigüedad precristiana y fue usado por muchos pueblos aborígenes para definir sus fiestas, y su calendario. No requiere de instrumentos precisos, es suficiente una estaca vertical y medir las sombras; o dos objetos alineados para medir la dirección del sol.

La elección del procedimiento de Eratóstenes es importante porque conceptualmente es el mismo usado para medir el radio de la Tierra dos mil años después. El método de Eratóstenes es sencillo: si el arco de 5,000 estadios está subtendido por un ángulo de 7.2 grados, ¿Cuánto mide la circunferencia entera que subtiende un ángulo de 360 grados? Y las herramientas eran primitivas: una estaca, una vara de medir distancias, y un compás para medir el ángulo.

Utilizando la triangulación, los astrónomos Delambre y Méchain midieron, en el siglo XVIII un arco de la Tierra cercano al ecuador y otro cercano a los polos para determinar la verdadera forma de la esfera. Todavía hoy hay ensayos que hace hincapié en la definición del metro, y no en la idea de Eratóstenes que es lo que quiero destacar.

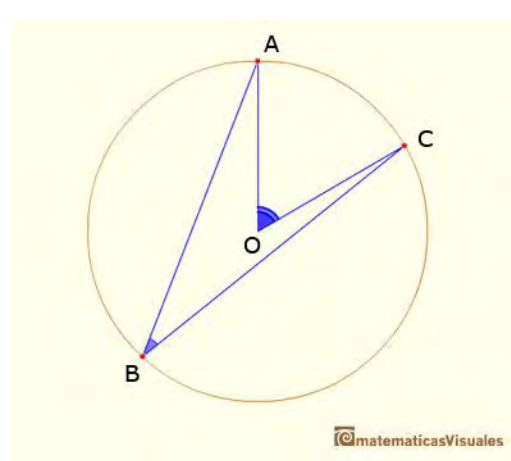
Eratóstenes conocía la distancia entre dos ciudades de Egipto, Siena (hoy Asuán) y Alejandría, que era de 5,000 estadios¹ (unos 924 km). Supuso que Siena y Alejandría estaban en el mismo meridiano, lo cual no es cierto porque hay una diferencia de 3 grados de longitud entre ambas. En Siena comprobó que el sol estaba en cénit asomándose en un pozo para verificar que su cabeza ocultaba la imagen del sol reflejada en el agua del pozo.

La elección de las ciudades no fue arbitraria. Siena (Asuán) estaba muy cerca del trópico de Cáncer, por tanto, Eratóstenes podía predecir que hacia el 21 de junio (solsticio de verano) el sol estaría en el cénit. Por tanto, bastaba con medir el ángulo subtendido por la sombra en Alejandría para resolver el problema. Supuso que la Tierra es una esfera perfecta, lo cual no es correcto. La distancia Siena-Alexandría era bien conocida.

En Alejandría midió con un compás, el ángulo que formaba una estaca vertical con la línea que va del extremo de la estaca al extremo de la sombra, que dio por resultado 7.2 grados. Hoy podríamos usar la calculadora para calcular el ángulo, pero Eratóstenes no contaba con ellas.

¹ El estadio sobrevive en Inglaterra, Irlanda y los Estados Unidos, bajo el nombre de "furlong" que aún se utiliza en la medición de distancias en carreras hípcas. Un furlong corresponde a un octavo de milla.

Con esos dos datos, Eratóstenes se dijo: esos 7.2 grados es el ángulo sustentado por el arco de la Tierra que mide 5,000 estadios, la circunferencia entera, que son 360 grados, debe medir $5,000 \cdot 360 / 7.2 = 5,000 \cdot 50 = 250,000$ estadios que equivalen hoy a unos 46,200 km de circunferencia.



Con este dato podemos calcular el radio de la Tierra dividiendo la circunferencia entre $2 \cdot 3.1416$, lo cual da $46,200 / 6.2832 = 7,353$ km de radio. El valor moderno es de 6,371 km. El error de Eratóstenes fue de 15.4% por exceso.

Nicaragua no tiene ninguna ciudad sobre el trópico de Cáncer como está Asúan ($24^{\circ}05' N$ $32^{\circ}54' E$). Tendríamos que buscar una ciudad de México, como Fresnillo, México ($23^{\circ}11' N$), pero la medición ya no la realizaría un estudiante de Nicaragua. Lo más que podemos hacer es elegir Jinotega y Masaya, pero la distancia es apenas de 125.5 km y estaríamos midiendo un ángulo subtendido de 1.13 grados si usamos una estaca de un metro de alto. Además, debemos determinar el día y la hora en que el sol está en el cénit.

Podemos soslayar las dificultades si elegimos como estaca un poste de luz, y determinamos su altura usando la sombra auxiliar de una estaca de un metro. Si el mismo día y hora, la sombra del poste es S, y la de la estaca de un metro E, podemos conocer la altura del poste de la relación $X/S = 1/E$. O sea $X = S/E$.

Esta herramienta nos permite conocer el ángulo sustentado por la sombra del poste el día que decidamos medir el radio de la Tierra. De la relación S/X podemos entrar determinar el ángulo cuyo arco tangente es S/X . Llamemos a este ángulo $\angle A$.

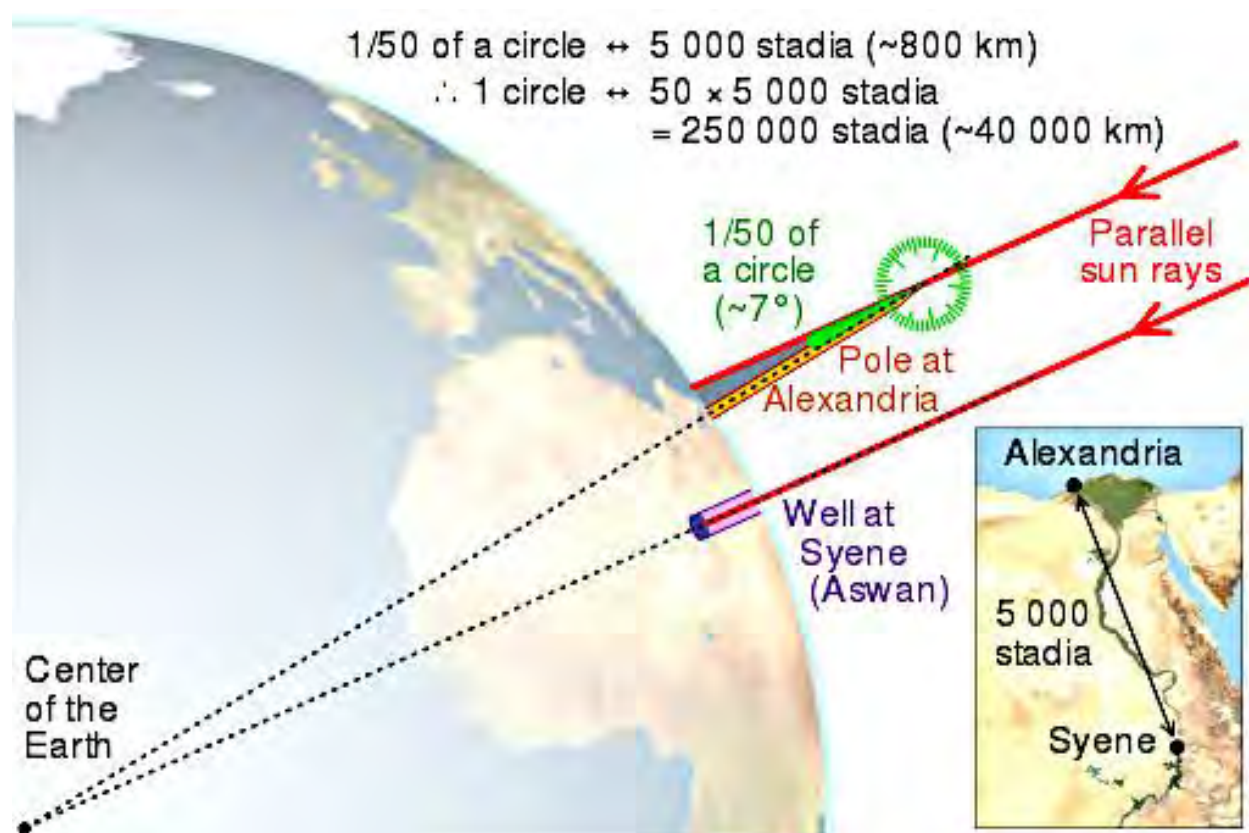
Ángulo sustentado: Dados dos puntos en una circunferencia, los radios desde el centro de la circunferencia a esos dos puntos forman un ángulo central, que se llama ángulo sustentado por el arco. En la figura $\angle AOC$ es el ángulo sustentado por el arco AC.

Los alumnos podrían elegir dos ciudades que estén casi en el mismo meridiano, como Jinotega ($13^{\circ} N$, y $86^{\circ} W$) y Masaya ($12^{\circ} N$ y $86^{\circ} W$), que difieren de estar en el mismo meridiano por un grado. La distancia en línea recta entre ambas ciudades es de 125.5 km según Google Earth.

Si la circunferencia de la Tierra para la distancia entre ciudades de 125.5 km y un ángulo sustentado es $\angle A$

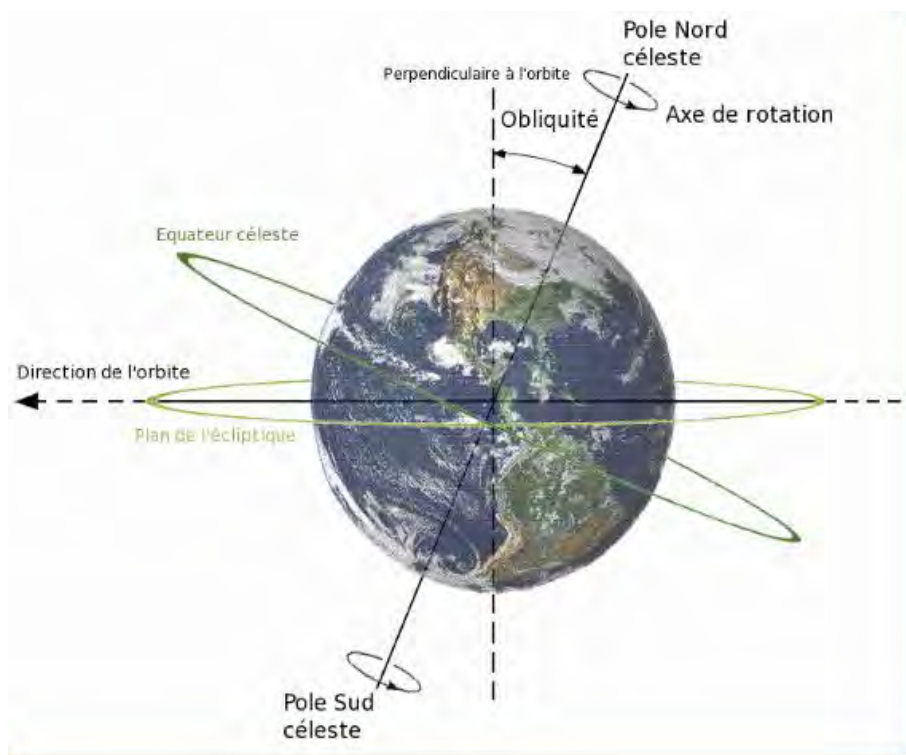
$$(360/\angle A) \cdot 125.5 = \text{Circunferencia}$$

La fecha aproximada de paso del sol por el cenit en Masaya sería el 19 de abril de 2018 (rumbo la norte, al solsticio de verano). Ese mismo día, un estudiante en Jinotega tendría que medir el ángulo que forma el triángulo rectángulo entre el poste de luz vertical y el extremo de la sombra proyectada, que es igual al ángulo en el centro de la tierra porque los rayos del sol son casi paralelos. La figura que sigue muestra las medidas de Eratóstenes, para ilustrar el procedimiento. El ángulo sustendido es igual al ángulo marcado en verde por ser alternos internos, como se dice en geometría de secundaria.



Si el estudiante de Jinotega mide el ángulo entre una estaca de un metro de alto y la sombra, encontraría un valor del orden de 1.13 grados. El ángulo es muy pequeño, pero el problema podría resolverse común porte de luz alto (E) y midiendo la longitud de la sombra del poste sobre el suelo (S) para luego calcular el ángulo como $\tan A = S/E$. La medición del ángulo sustendido sería así

más precisa porque la longitud de la sombra sería larga porque el poste de luz es más alto.



Casi dos mil años después de Eratóstenes, las expediciones de Bouguer al virreinato de Perú y de Clairaut a Laponia salieron para medir un grado del meridiano terrestre, y así determinar la forma del esferoide terrestre. El concepto de estas expediciones se fundamenta en el mismo principio usado por Eratóstenes dos mil años antes, pero los expedicionarios ahora contaban con instrumentos precisos para medir ángulos y determinar distancias por triangulaciones, porque la topografía del terreno no permite la medición en línea recta. En 1735, Bouguer con Charles Marie de La Condamine emprendieron una misión científica con el fin de medir un grado del meridiano cerca del ecuador. Diez años los pasaron completando esta operación, publicando una relación completa de estos trabajos en 1749. En 1736, Alexis Claude Clairaut junto con Pierre Louis Maupertuis, formó parte de una expedición a Laponia para medir un grado de meridiano cerca de los polos terrestres. Tras su regreso, publicó un tratado que llamó *Théorie de la figure de la terre* (1743).

Mis profesores convirtieron las expediciones de Bouguer y Clairaut en un relato casi literario de los obstáculos encontrados, y todavía hoy extraen de estas definiciones la definición del metro, olvidando los conceptos matemáticos simples y brillantes ideados en el siglo III antes de Cristo.

La definición del metro como unidad de longitud fue creada por la Academia de Ciencias de Francia en 1792 y definida como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el polo de la línea del ecuador terrestre. Es muy posterior a las mediciones de Bouguer y Caliraut, publicadas en 1743 y 1749. Es decir, 49 y 43 años, después respectivamente. ■