© George G. Cuevas – george_cuevas197@hotmail.com

Relatividad General – Último Capítulo

George Cuevas

Resumen. La tarea de primer orden es dar una descripción intuitiva de lo que son las curvas geodésicas. Después sigue una definición formal. El concepto de transporte paralelo de vectores y tensores sobre una curva geodésica es explicado. Los Símbolos de Christoffel son explicados. La ecuación que gobierna el movimiento en un campo libre de efectos gravitacionales es presentada. Después vamos a presentar cómo la misma ecuación debe ser modificada para acomodar efectos gravitacionales. Llegamos al acuerdo de que es posible representar la trayectoria en un escenario libre de gravitación usando la ecuación de geodésicos. Después nos damos cuenta que la misma ecuación de geodésicos puede ser usada para representar movimiento en escenarios que llevan efectos de gravedad. Lo único que debemos hacer en este caso es usar un marco acelerado con una fuerza equivalente a la fuerza de gravedad. Entonces el problema se reduce a resolver la ecuación de geodésicos para hallar la trayectoria. Con esta idea calculamos los Símbolos de Christoffel y usando estos mismos llevamos a cabo la calculación de los elementos del Tensor de Ricci. Con ello procedemos a resolver la ecuación de Einstein en el vacío. Esto nos lleva a la calculación del tensor Métrico de Scwarzschild. Ahora nos es posible escribir la ecuación de órbitas en el vacío inmediato a un cuerpo masivo. La ecuación de órbitas es la misma que la ecuación de geodésicos. Comparamos los resultados de Einstein versus los resultados de Newton. Hablamos de trayectoria de cuerpos que llevan masa y también de la trayectoria de ondas de luz (no llevan masa). Decimos que la trayectoria de cuerpos sin masa ocurre sobre las paredes de conos del futuro. Introducimos el concepto de vectores nulos. Los llamamos "Killing Vectors" y explicamos cómo estos vectores representan cantidades conservadas. Después introducimos el concepto de cuerpos estelares masivos y con ello explicamos el concepto de agujeros negros. Identificamos la singularidad que ocurre a valores radiales de r = 2m. Esto nos lleva al concepto de horizonte de acción. El Horizonte de Acción demarca linderos que solamente se pueden cruzar en una dirección. Vemos que lo que pasa adentro del Horizonte de Acción no está al alcance de observadores afuera. Con esto ponemos punto final al tema de la relatividad.

Palabras Claves. Geodésico, Transporte paralelo, Símbolos de Christoffel, Coordenadas polares, Trayectoria, Tensor Métrico, Tensor de Ricci, Solución de Schwarzschild, Vectores nulos, Killing Vectors, Agujeros negros, Estrellas de Neutrón, Horizonte de acción.

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Abstract. First order of business is to give a descriptive definition of what it is a geodesic curve. After doing this we present a formal definition. The concept of parallel transport is introduced. We cite this property as one of the chief properties of geodesic curves because this allows quantities that are conserved to move from place to place. We explain what the Christoffel symbols are and what role they play in the equations of motion. The equation that governs motion in a gravity free environment is introduced. Then we identify how this equation must be modified in order to accommodate gravity. It turns out that the equation of motion for both gravitation free and gravitational environments is the equation of geodesics. In the latter environment the motion is represented by that of an accelerated frame moving along a geodesic curve. We introduce the Metric Tensor and show how to represent the integral form of arc length. We indicate that geodesics represent extremum values of distance between 2 points. Using an accelerated reference frame that has acceleration equivalent to that of the gravitational field we show how the motion in the presence of gravity can be reduced to Lorentzean motion. The problem of trajectories in the presence of a gravitational field can now be reduced to solving the equation of geodesics. We then proceed to solving Einstein's field equation in vacuum. This takes us to the Schwarzchild solution. We solve for the elements of the Schwarzchild metric and then proceed to finding the solution for geodesics. We define Killing Vectors and explain how these vectors represent conserved quantities. We discuss null geodesics and we discuss how we can take advantage of symmetries in order to simplify equations. We discuss massive galactic object, black hole, singularities. We talk about event horizon and how anything that happens beyond the event horizon is out of reach to outside observers.

Key Words. Geodesics, Parallel transport, Christoffel symbols, Polar coordinates, Trajectory, Metric Tensor, Ricci's Tensor, Schwarzschild Solution, Null vectors, Symmetry, Killing Vectors, Black holes, Neutron star, Singularity, Event horizon.

GEODÉSICOS

Primero vamos a dar una explicación descriptiva. Geodésicos son las líneas rectas de un espacio curvo. Esta frase parece que afirma una falsedad; cómo puede una línea ser al mismo tiempo recta y existir en un espacio curvo? Aquí va la explicación:

Imagínense Uds un vehículo, digamos una camioneta de 2 ejes y 4 ruedas. En el techo pintamos una flecha que se extiende a través de lo largo de la camioneta y apunta en dirección que coincide con el eje longitudinal del vehículo. Hay también una segunda flecha que va en dirección transversa y apunta en dirección al eje de las ruedas traseras. Imagínense Uds. también una esfera sólida de 1 Kilómetro de circunferencia. Vamos a montar la camioneta en la superficie de dicha esfera. Existe también una fuerza electromagnética de contacto (atracción) que mantiene firme presión entre la superficie de la esfera y las ruedas de manera que la camioneta no se desprende y cae debido a la fuerza de gravedad. En otras palabras, la camioneta puede desplazarse en todo punto de la esfera.

Con el timón fijo, el conductor arranca y se desplaza en dirección fija en la superficie de la esfera y al cabo de unos minutos de viaje regresa al mismo punto en donde emprendió su viaje. Con respecto a la trayectoria de la camioneta, queridos lectores, dicha trayectoria es una curva geodésica. Esta curva consiste en un meridiano y los meridianos representan círculos de máxima longitud. Favor de notar las siguientes observaciones:

- Durante el viaje, el timón permaneció fijo. Es decir, no hubo cambio de dirección. Por esto decimos que los geodésicos son las líneas rectas de un espacio curvo
- La flecha longitudinal (pintada en el techo de la camioneta) cambió de dirección gradualmente a medida que la camioneta se desplazaba en su círculo de circumnavegación. Dicha flecha dio una vuelta entera (360º) y al regreso la dirección fue exactamente la misma que antes del viaje.
- La flecha transversal (en dirección al eje de ruedas traseras) por el contrario no cambió de dirección durante el viaje. Esta flecha se desplazó alrededor de la esfera, pero se mantuvo en dirección fija durante el viaje.
- La trayectoria de la camioneta es una línea curva en el espacio de 3 dimensiones que contiene la esfera. Podríamos por ejemplo ignorar la esfera y pretender que el geodésico de la trayectoria es una curva que está en un espacio tridimensional. La curva cambia de dirección a medida que da vuelta y se desplaza de un punto a otro. Por ejemplo, si uno viaja la mitad de la circunferencia, el cambio total en dirección es de 180º. Si uno viaja ¼ de la circunferencia, el cambio total de dirección es de 90º. De punto a punto el cambio de dirección es mucho más pequeño y entonces hablamos del cambio instantáneo de dirección. El cambio instantáneo de dirección es representado por el cambio de dirección de la línea tangente en el punto de observación. En el caso de la trayectoria de la camioneta, la flecha longitudinal representa la línea tangente de la curva geodésica y el cambio de dirección de esta flecha a medida que el vehículo viaja en su trayectoria de un punto a otro representa el cambio instantáneo en dirección del geodésico. Entonces podemos decir que el

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

timón de dirección de una curva geodésica es su línea tangente que corresponde al punto de observación

- Hemos hablado de líneas tangentes al geodésico. En cada punto del geodésico hay un millar de líneas tangentes que se pueden construir. De todas ellas, hay 2 direcciones principales y estas son la dirección de la flecha longitudinal y la dirección de la flecha transversal (dirección del eje de ruedas). Estas dos flechas forman un plano tangente a la superficie de la esfera. Rigurosamente, las líneas tangentes y el plano tangente deben hacer contacto con la curva geodésica y con la superficie de la esfera. En el caso de la camioneta montada en la esfera este contacto no existe. Para lograr que haya contacto es necesario imaginar que el tamaño de las ruedas de la camioneta es infinitesimal De esta manera el plano tangente está debidamente en contacto con la esfera.

Todas estas observaciones que hemos citado son con el propósito de ilustrar el concepto de transporte paralelo de vectores a través de una curva arbitraria (no necesariamente un geodésico). Este concepto lo vamos a explicar más adelante.

Volviendo a la camioneta y la esfera, ahora vamos a hacer un segundo viaje alrededor y regresar al mismo punto de partida, pero esta vez vamos a escoger una trayectoria más corta. Es decir, vamos a escoger un punto cercano como eje y la trayectoria va a ser un círculo de distancia radial de 15 metros a partir del eje. Para mantenernos en esta ruta vamos a marcar el círculo con pintura roja y así mantener el rumbo. Comenzamos el viaje y esta vez notamos que para mantener la camioneta en la ruta deseada es necesario darle vuelta al timón y cambiar la dirección a medida que el viaje progresa. Esto es totalmente diferente cómo manejamos el timón en el primer viaje. Se acuerdan que el timón permaneció fijo y en posición neutra? Porqué es necesario en este viaje ajustar la dirección de manera continua? En otras palabras, hay que proporcionar una fuerza al vehículo para que cambie de dirección. Esto nos señala que esta segunda trayectoria no es una curva geodésica. También hay que notar que la flecha en dirección transversa (coincide con la dirección del eje de ruedas) no apunta en dirección fija durante el viaje pero describe un cono a medida que la camioneta viaja alrededor del círculo.

LA LONGITUD DEL ARCO

Hemos estado hablando de un espacio curvo. Los intervalos de tiempo-espacio se desarrollan en un espacio curvo. No solamente las dimensiones

espaciales llevan curvatura, pero el tiempo también es curvo. Lo que quiero decir es que la fibra que representa el eje del tiempo es, o puede ser curvo. La métrica encierra en sí misma el código de la curvatura. La métrica se puede expresar por medio del polinomio $(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$ y también se puede expresar por medio del tensor métrico : $(d\tau)^2 = (V^T).(M).(V) = (g_{ab}).(dx^a).(dx^b)$. Esta última expresión usa las componentes del tensor métrico multiplicadas por las componentes del intervalo. Los índices "a" y "b" se repiten y esto quiere decir que hay que sumar sobre las 4 dimensiones
No se olviden que también $(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$ representa el intervalo de tiempo-espacio.

Si hablamos de un intervalo de tiempo espacio que es largo, la longitud (distancia) de este intervalo se puede calcular por medio de la métrica y consiste en sumar los pequeños (infinitesimal) intervalos ($d\tau$) que se extienden entre A y B. De manera que la distancia del intervalo AB se extiende desde Punto A hasta el punto B.

Suma $(d\tau_1 + d\tau_2 + d\tau_3 ...+ d\tau_n) = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int_A^B \sqrt{g_{ab}\, dx^a dx^b}$ = Distancia AB = s

El símbolo $\int_A^B$ quiere decir integrar (sumar) los intervalos infinitesimales $d\tau$ entre los puntos A y B de la curva. La Figura 23 da una representación gráfica de este proceso. Aquí el intervalo se representa por medio de la letra "s" que significa distancia. La operación de "integrar" viene del cálculo diferencial.

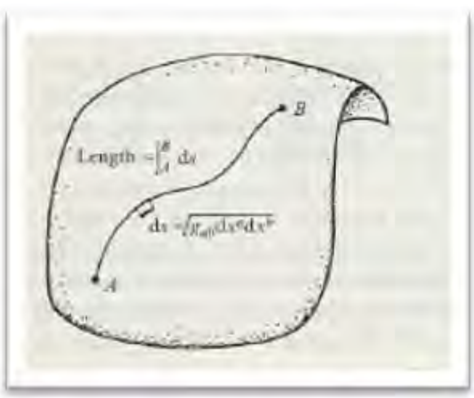

Figure 23. Favor notar el elemento infinitesimal de distancia "ds". La suma total de la longitud de cada elemento constituye la distancia total entre los puntos A y B de la curva

TRANSPORTE PARALELO

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

En el espacio Euclidiano es fácil trasladar un vector de un punto a otro de manera que la longitud y dirección de dicho vector no cambie. Esto quiere decir que la magnitud y dirección de un vector permanece la misma de un punto a otro. En un espacio curvo también es posible efectuar el traslado de un vector de un punto a otro de manera que el tamaño y la dirección no cambien, pero el traslado debe hacerse sobre una curva geodésica. La explicación es simple si uno toma en cuenta que en una superficie curva los vectores no van incrustados en la superficie, pero son vectores tangentes a la superficie y quiera decir que solamente el punto de origen de dicho vector hace contacto con la superficie. En una superficie curva, la dirección de la línea tangente cambia de punto a punto de manera que cuando movemos un vector tangencial de un punto a otro, la dirección va a cambiar. Por el lado contrario, si efectuamos dicho traslado sobre una curva geodésica, la dirección del vector tangencial no cambia.

Esta propiedad de las curvas geodésicas no es intuitiva y merece una explicación: Cuando citamos el ejemplo de la camioneta viajando sobre el meridiano hablamos de que la flecha transversal (en dirección al eje de las ruedas) mantiene dirección fija en el espacio a medida que la camioneta avanza de un punto a otro. Cuando la camioneta hizo el viaje sobre el circulo de latitud cercano al polo, la flecha transversal no mantuvo dirección fija durante el viaje, pero describió la superficie de un cono a medida que la camioneta avanzaba de un punto a otro. Este ejemplo nos da amplia demostración de que desplazamiento sobre un geodésico permite el transporte paralelo de un vector tangencial. Debo explicar sin embargo que la flecha transversal representa un vector que es tangente a la superficie (esfera) pero no es tangente a la trayectoria. Ahora vamos a hablar del vector que es tangencial no solamente a la superficie, pero es tangencial a la trayectoria. Este es representado por la flecha longitudinal. La flecha longitudinal no permaneció fija durante ninguno de los 2 viajes. Quiere decir que el vector tangencial a la curva cambio de dirección de manera que dio una vuelta de 360^0 durante el viaje. Cómo explicamos esta falla?

La respuesta es que debemos cambiar el concepto de paralelismo para acomodar lo que ocurre en superficies curvas. Vamos a hablar (un poquito) del concepto de Paralelismo de Levi-Civita: Cuando hablamos de la flecha transversal usamos el concepto de paralelismo en el sentido Euclidiano. En realidad, la flecha transversal permaneció paralela en el sentido Euclidiano. Por otra parte, la flecha longitudinal permaneció paralela no en el sentido Euclidiano, pero si en acuerdo con el paralelismo de Levi-Civita. Con respecto a este último, paralelismo quiere decir mantener la misma dirección que la trayectoria. Aquí juzgamos cambios de dirección con respecto al plano tangente de la misma curva. Anteriormente habíamos dicho que las 2 flechas (transversal y longitudinal) formaban un plano tangente a la esfera. Es más, con respecto al punto de contacto entre el plano tangencial y la esfera, es posible dibujar líneas tangenciales en toda dirección (360^0). Dichas líneas tangenciales pertenecen a la misma familia porque todas residen en el mismo plano tangencial. Otro ejemplo que les puedo dar es decir que la flecha longitudinal siempre durante el viaje se mantuvo en el plano de la trayectoria. El hecho de que el vector tangencial siempre vaya alineado con la curva es una propiedad natural porque la dirección de la tangente representa la dirección instantánea de la curva (del geodésico). Como dijimos anteriormente, las tangentes del geodésico son los timones del geodésico y apuntan en la

Figure 24 . Este diagrama enseña punto "P" con su respectiva línea tangente y más adelante Punto "Q " también con su respectiva tangente. El objetivo de esta figura es enseñar cómo la tangente cambia de dirección de punto a punto. Favor de notar que en el Punto Q se observa no solamente la tangente que corresponde al Punto Q, pero hemos trasladado (transporte paralelo) la tangente del punto P para poder medir el cambio de dirección. Dicho cambio de dirección consiste en el ángulo θ (el triangulo del lado derecho de la figura).

precisa dirección que el geodésico va a tomar.

EL OBSERVAR CONSTANTE RITMO PARA CAMBIO DE DIRECCIÓN

Los geodésicos tienen otra propiedad de la cual no hemos hablado y esta se refiere a la rapidez con que el geodésico cambia de dirección. En otras palabras, qué tan rápido los timones (los vectores tangenciales) dirigen ejecución de cambio de dirección? Aquí medimos rapidez de doblar en términos de grados (magnitud del ángulo) por metro de trayectoria. Por ejemplo, si la trayectoria es de 1000 metros (circunferencia del meridiano) y la camioneta regresa al mismo punto de partida, el ángulo que la flecha longitudinal describió al dar una vuelta entera es de 360^0. Entonces estamos hablando de 9 grados por cada 25 metros de trayectoria. Este ritmo angular de dar vuelta se mantiene constante durante toda la trayectoria. Esta es una propiedad peculiar de las curvas geodésicas. Los Geodésicos dan vuelta a constante ritmo medido en grados por cada metro de trayectoria. Llamemos esta propiedad "constancia en aceleración de cambio de dirección".

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Figura 24 da una representación gráfica de cómo la línea tangente en el punto “P” que es representada por el vector x'^j cambia de dirección y al llegar al punto “Q” y siendo representada por el vector ($x'^j + dx'^j$) apunta en una nueva dirección después de girar por el ángulo de magnitud θ. Esto se puede captar por medio del pequeño triángulo del lado derecho. Este triángulo enseña la dirección vieja del punto P, la dirección nueva del punto Q y el tercer lado del triángulo ($dx'^j - d^*x'^j$) denota el cambio de dirección.

Es importante que todos tengamos buen entendimiento de esta propiedad. De acuerdo con lo que hemos dicho, las curvas geodésicas permiten el transporte paralelo del vector tangencial. Esto quiere decir que si una partícula viaja en tiempo-espacio y su trayectoria es un geodésico, el vector que representa el mom-energía se desplaza en forma paralela de acuerdo con la ley de conservación de energía y momento. El transporte paralelo sobre el geodésico permite que la energía y el momento se conserven. Por favor acuérdense que el vector de mom-energía apunta en dirección a la trayectoria que es la línea del mundo de la partícula y que es también el geodésico.

EXPRESIÓN MATEMÁTICA QUE CARACTERIZA A UN GEODÉSICO

Hasta este punto hemos dado de manera descriptiva una amplia definición de lo que es una curva geodésica y hemos hablado de las propiedades de estas curvas. Nos falta ahora dar una descripción matemática. Vamos a dejar a un lado el rigor que envuelve la derivación de estas expresiones matemáticas y solamente vamos a explicar el significado de estos términos.

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left(\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \quad \text{Fórmula 19}$$

Fórmula 19 es la expresión matemática de curvas geodésicas. Es decir, para que una curva califique como una curva geodésica, dicha curva debe satisfacer ecuación 19. No vamos a derivar esta fórmula, pero si es importante saber que esta fórmula viene del proceso matemático llamado ”cálculo de variación” en el cual se busca el valor extremo (máximo o mínimo) del $\int_A^B \sqrt{g_{ab}\, dx^a dx^b}$ que representa la distancia entre los puntos A y B de la curva (mirar Figura 23). La teoría nos dice que para ir del punto A al punto B hay varias trayectorias que uno puede seguir. Fórmula 19 nos dice cómo calcular la curva que representa mínima distancia entre puntos A y B. Esta curva de mínima distancia es el geodésico que conecta dichos puntos.

Los índices (i, j, k) en Fórmula 19 se refieren a las coordinadas de tiempo-espacio. La fórmula contiene 2 términos. El primer término representa la magnitud del vector tangente a la curva. El vector tangente es $[\frac{dx^i}{ds}]$ que es la velocidad $V_{tiempo\text{-}espacio}$ = (dt/dτ, dx/dτ, dy/dτ, dz/dτ). El segundo término representa la dirección del mismo vector. La suma de estos 2 términos generalmente representa la aceleración, que es la variación de la velocidad con respecto a distancia "s". Para que la curva sea un geodésico, la aceleración debe ser cero. Ecuación 19 nos dice entonces que la variación en magnitud del vector tangente, más la variación debida al cambio de dirección deben cancelarse el uno al otro de manera que la variación total de dicho vector sea cero. Esta es precisamente la condición para que las tangentes de dicho geodésico se puedan desplazar paralelamente sin cambio en magnitud.

SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Los términos $\binom{i}{jk}$ representan coeficientes llamados símbolos de Christoffels y se calculan de la manera siguiente $\binom{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{jk}} = \boldsymbol{g^{ir}(jkr)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{g^{ir}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial g_{kr}}}{\boldsymbol{\partial x^j}} + \frac{\boldsymbol{\partial g_{jr}}}{\boldsymbol{\partial x^k}} - \frac{\boldsymbol{\partial g_{jk}}}{\boldsymbol{\partial x^r}}\right)$. Los coeficientes de Christoffel toman en cuenta la variación de los elementos del tensor métrico a medida que las tangentes se desplazan sobre la curva. Cuando los elementos del tensor métrico son de valor fijo (por ejemplo como el tensor 'métrico de la relatividad especial) la variación es cero. Esto quiere decir que $\binom{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{jk}} = \mathbf{0}$

GEODÉSICOS, DEFINICIÓN

En este punto ya podemos dar una definición de lo que es un geodésico:

- Un geodésico es una curva entre 2 puntos A y B de manera que la distancia entre dichos puntos es un extremo (máximo o mínima distancia)
- Un geodésico es una curva que permite el paralelo traslado de su propia tangente. Esta propiedad se conoce como "autoparalelismo de la tangente"
- Cuerpos que van en caída libre a través de tiempo espacio llevan como trayectoria un geodésico.
- El vector tangente es $[\frac{dx^i}{ds}]$ que es la velocidad $V_{tiempo\text{-}espacio}$ y la ecuación que el geodésico debe satisfacer como condición de valor extremo es la misma ecuación que establece la condición para el desplazamiento paralelo de $V_{tiempo\text{-}espacio}$. Por favor tengan en cuenta que transporte paralelo asegura que la variación de la tangente a medida que se desplaza de punto a punto es cero y esto asegura la conservación del Mom-energía.

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

ESPACIO LIBRE DE EFECTOS GRAVITACIONALES

Cuando estudiamos la relatividad especial vimos que el espacio estaba libre de efectos gravitacionales. El movimiento de partículas de prueba era rectilíneo y de velocidad constante. Afirmamos que la distancia del intervalo de tiempo–espacio es $(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$. Usando coordenadas rectangulares, el polinomio que representa la métrica y el tensor métrico que corresponde a la relatividad especial son:

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy^2 - (dz)^2$$

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

De aquí vemos que los elementos del tensor métrico son de valor fijo y como consecuencia los símbolos de Christoffels son de valor cero. Esto quiere decir que el espacio de la relatividad especial es plano y el tensor de Riemann es también cero. Lo mismo se puede decir del tensor de Ricci ya que este tensor se deriva del tensor de Riemann.

Cuando hay masa y por supuesto cuando hay efectos gravitacionales la misma masa induce la curvatura del espacio. El polinomio que representa la métrica y con ello los elementos del tensor métrico dejan de ser fijos y ahora cambian de punto a punto. Los símbolos de Christoffel dejan de ser cero y ahora el Tensor de Riemann y el Tensor de Ricci también dependen en las coordinadas. El espacio deja de ser plano y ahora la trayectoria observa la misma curvatura del espacio. Vamos a señalar la importancia del tensor métrico y como la estructura de este tensor caracteriza la geometría del espacio.

Sin embargo hay que notar que es posible representar el movimiento rectilíneo y de velocidad fija usando Fórmula 19 que es la ecuación de geodésicos. Esto es porque Fórmula 19 estipula que la aceleración es cero. No se permite variación de velocidad. Pero esto es precisamente lo que llamamos movimiento Lorentzeano. Cuando hablamos de movimiento Lorentzeano, el segundo término en Fórmula 19 es cero y la solución que resulta es simplemente una trayectoria rectilínea sin curvatura alguna.

© George G. Cuevas – george_cuevas197@hotmail.com

EFECTOS DE GRAVITACIÓN

En la Relatividad General el espacio es curvo y hay que tomar en cuenta los efectos gravitacionales. En este caso hay que modificar la ecuación de movimiento (Fórmula 19) para tomar en cuenta la aceleración debida al efecto gravitacional. La nueva ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \binom{i}{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = f^a$$

También el Principio de equivalencia de Albert Einstein nos dice que es posible hallar en la vecindad de las partículas de prueba un marco de referencia en donde la velocidad de dichas partículas es constante y no depende en las coordinadas. Precisamente, esto es lo que vamos a hacer. Vamos a trasladar nuestro marco de referencia a un sistema de coordinadas que se desplaza con la misma velocidad que las partículas de prueba. Es decir, vamos a usar un marco acelerado; vamos en caída libre sobre un geodésico y en todo punto de la trayectoria sobre dicho geodésico la aceleración es cero. Esto quiere decir que f^a se reduce a cero. Ahora en este marco se nota que no hay aceleración porque las partículas de prueba van a la misma velocidad que el observador. El movimiento acelerado se ha transformado en un movimiento rectilíneo y Lorentzeano. Ahora se pueden ignorar los efectos gravitacionales.

Nos encontramos entonces que la ecuación de geodésicos se puede usar en todo caso de movimiento en espacio curvo o movimiento en espacio plano. Ahora vemos también que aun cuando hay efectos gravitacionales es posible usar un marco acelerado que lleva la misma trayectoria (curva geodésica) que las partículas de prueba y entonces el movimiento se transforma en trayectorias rectilíneas y de velocidad constante. Es decir, el mero hecho de que el marco de referencia va en caída libre sobre un geodésico (en todo punto del geodésico la aceleración es cero) transforma el movimiento en movimiento es Lorentzeano libre de efectos gravitacionales.

De acuerdo con lo que dijimos anteriormente, hemos eliminado el efecto de aceleración y es posible resolver el problema de la trayectoria si se considera que los elementos del tensor métrico llevan la clave para caracterizar el geodésico que representa la trayectoria. Este es el camino que vamos a seguir. El problema es que no hemos identificado cual es el tensor métrico que corresponde al campo gravitacional. Desde luego, el punto de partida tiene que ser el tensor métrico de la Relatividad Especial.

COORDENADAS POLARES

Es conveniente transformar la métrica de la Relatividad Especial a coordenadas polares que son (t, r, θ, φ). La mecánica de dicha transformación no la vamos a tratar aquí pero se pueden encontrar en cualquier manual de

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

referencia (Algebre o Geometría). Por favor tomen en cuenta que no hay nada nuevo en estas expresiones. Es como decir la misma cosa usando Inglés o cualquier otro idioma. La métrica y el tensor métrico que corresponden son:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \qquad \textbf{Formula 20}$$

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix}$$

Una vez más afirmamos que en el caso de la Relatividad Especial el Tensor de Riemann desaparece (es cero) y el geodésico que representa la trayectoria es una línea recta. Quiere decir que el espacio que corresponde a la Relatividad General en donde se admiten trayectorias que no son rectilíneas, el tensor de Riemann debe manifestarse como una realidad. Lo mismo se puede decir del Tensor de Ricci ya que el Tensor de Ricci se deriva del Tensor de Riemann $R_{ij} = R^{\alpha}{}_{ij\alpha}$ (se suma sobre el índice α). El tensor de Ricci se puede expresar por medio de los Símbolos de Christoffel:

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \log\sqrt{|g|}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\binom{\alpha}{i\,j} + \binom{\alpha}{\beta\, j}\binom{\beta}{i\,\alpha} - \binom{\beta}{i\,j}\frac{\partial \log\sqrt{|g|}}{\partial x^\beta} \quad \text{Formula 21}$$

Una vez más mencionamos que los símbolos de Christoffel representan la variación de los elementos de la Métrica a medida que uno se desplaza de un punto a otro en el espacio.

Símbolos de Christoffel = $\binom{i}{jk} = g^{ir}(jkr) = \frac{1}{2} g^{ir}\left(\frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}\right)$ Formula 22

Inspección de Fórmulas 21 y 22 nos indica que los símbolos de Christoffel y los elementos del tensor de Ricci se pueden calcular meramente usando los elementos del Tensor Métrico. El término $\log\sqrt{|g|}$ representa el logaritmo de la raíz cuadrada del determinante del Tensor Métrico.

El Tensor de Ricci es simétrico con respecto a sus índices. Esto quiere decir que $R_{ij} = R_{ji}$. Aun tomando en cuenta la simetría, hay 10 elementos que son independiente y cada uno de estos da lugar a un sistema de ecuaciones. El resolver estas ecuaciones llega a ser una tarea monumental. Cuando nos enfrentamos con ecuaciones matemáticas difícil de resolver, hay buscar casos especiales con escenarios fáciles de resolver. Formas de simplificación incluye simetría esférica e invariabilidad con respecto a la coordinada de tiempo. Admitimos variabilidad con respecto a posición sin embargo. Otra forma de simplicidad es buscar soluciones en el espacio vacío alrededor de un cuerpo masivo. Si vamos al vacío entonces no hay necesidad de incluir el Tensor de Energía y Momento. El intento es desarrollar soluciones para casos más simple. Verificar estas soluciones y después resolver escenarios de mayor dificultad.

En Noviembre de 1915 Einstein presentó a la Academia de Ciencias en Prusia la Teoría en la cual incorporaba el campo gravitacional en el panorama de la Relatividad. En ese tiempo no había solución exacta para los elementos del Tensor Métrico. No fue hasta el año siguiente, 1916 cuando el Físico Alemán Karl Schwarzschild desarrolló la solución exacta y se la mandó por correo a Einstein mientras el Señor Schwarzschild peleaba en la frontera rusa durante la primera guerra mundial. La historia nos dice que el mismo Einstein se sorprendió al ver la simplicidad de la solución presentada por el Señor Schwarzschild.

Vamos a presentar la solución de Schwarzschild. El resultado de esta solución va a ser los elementos del Tensor Métrico. Los elementos de dicho tensor llevan la clave y con ellos podemos formular las ecuaciones de la trayectoria (geodésicos).

LA SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

El escenario de mayor simplicidad es estacionario con respecto a tiempo y de simetría esférica. En el vacío y en las afueras alrededor de un cuerpo masivo los efectos gravitacionales persisten pero la intensidad va poco reduciéndose porque el efecto se va esparciendo a través del espacio. A distancias mucho más largas se llega a un punto en el cual la intensidad se desvanece a un nivel imperceptible. Entonces decimos que a largas distancias radiales los efectos gravitacionales son cero y el Tensor Métrico llega ser Lorentzeano. Este es el escenario que corresponde a la solución de Schwarzschild.

Cuando no hay masa, $R_{ij} = 0$. Cada componente del Tensor de Ricci debe ser calculada. El hecho de que cada componente es cero debe ser formulado por medio de ecuaciones. Coordinadas polares son adeptas para usar en este problema porque el campo gravitacional lleva simetría esférica. Postulamos que la métrica y el tensor métrico son:

$$\boldsymbol{ds^2 = e^{\lambda(r)}dt^2 - e^{\mu(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta\, d\varphi^2})\text{ Fórmula 23}$$

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}$$

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

Los términos λ(r) y μ(r) son polinomios de "r". La forma de estos polinomios se desconoce pero sabemos que a medida que nos alejamos del cuerpo masivo los efectos gravitacionales pierden intensidad y a muy largas distancias el tensor métrico de la Relatividad General coincide con el Tensor Métrico de la Relatividad Especial. Quiere decir entonces que $e^{\lambda(r)}$ y $e^{\mu(r)}$ llegan a ser unidad cuando la distancia radial se aproxima a infinito. Los pasos que siguen son muy laboriosos y envuelven uso de métodos para solucionar ecuaciones diferenciales (Cálculo diferencial). Vamos a dar un par de ejemplos de cómo se llevan a cabo estas calculaciones y después solamente vamos a presentar los resultados:

- Usando los elementos del tensor métrico hay que calcular los Símbolos de Christoffel (usar Fórmula 22)
- Usando los Símbolos de Christoffel hay que calcular los elementos del Tensor de Ricci (hay que usar Fórmula 21)
- Usando los elementos del Tensor de Ricci, hay que formular la ecuación que nos dice que cada componente es cero
- Usando las ecuaciones en el paso anterior hay que encontrar la forma de los polinomios λ(r) y μ(r).

CÁLCULO DE LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Vamos a tomar dos pasos para atrás y vamos a enseñar cómo se calculan los Símbolos de Christoffel. Volvamos a Fórmula 22. Inspección del Tensor Métrico nos dice que $g_{ij} = 0$ cuando los índices son diferentes. En otras palabras, todos los elementos son cero excepto los elementos sobre la diagonal. Lo mismo se puede decir del Tensor g^{ij} que es el inverso al Tensor Métrico. De manera que:

$g_{tt} = e^{\mu}$, $g_{rr} = -e^{\lambda}$, $g_{\theta\theta} = -r^2$, $g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\theta$

$g^{tt} = e^{-\mu}$, $g^{rr} = -e^{-\lambda}$, $g^{\theta\theta} = -1/r^2$, $g^{\varphi\varphi} = -1/\ r^2\sin^2\theta$ $g_{ij} = 0, i \neq j$ $g^{ij} = 0, i\ \neq j$ $g_{ij}.g^{ij} = 1$

$\frac{dg_{rr}}{dr} = -e^{\lambda}\,\lambda'$, $\frac{dg_{tt}}{dr} = e^{\mu}\,\mu'$, $\frac{dg_{\theta\theta}}{dr} = -2r$, $\frac{dg_{\phi\phi}}{dr} = -2r sin^2\,\theta$,

$\frac{dg_{\varphi\varphi}}{d\theta} = \ -2r^2\sin\theta\cos\theta$,

$\binom{r}{r\,r} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{dg_{rr}}{dr}\right) = \left(-e^{-\lambda}\right)\left(-e^{\lambda}\lambda'\right) = \frac{\lambda'}{2}$ Explicación, $\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$

$\binom{t}{r\,t} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{dg_{tt}}{dr}\right) = \left(-e^{-\lambda}\right)(-e^{\mu}\mu') = \frac{\mu'}{2}$ Explicación, $\mu' = \frac{d\mu}{dr}$

$$\binom{\theta}{\phi\,\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{dg_{\phi\varphi}}{d\theta}\right) = -\frac{2r^2 \sin\theta \cos\theta}{2r^2} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\binom{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{r\,\theta}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}} \cdot \binom{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r\,\phi}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}},\ \binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\theta\,\theta}} = -\boldsymbol{re^{-\lambda}},\ \binom{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\theta\,\phi}} = \mathbf{cot}\,\boldsymbol{\theta},\ \binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\phi\,\phi}} = -\boldsymbol{e^{-\lambda}r.sin^2\theta},$$

$$\binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{t\,t}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{\mu-\lambda}\mu'}$$

Calculación de los elementos del Tensor de Ricci. Tenemos a mano Todos les elementos necesarios para la calculación de las componentes del Tensor de Ricci. Sin embargo esta calculación es muy laboriosa. Para no abrumar a mis queridos lectores con tantas fórmulas, solamente voy a presentar los resultados. En el Espacio de Schwarzschild solamente 4 elementos sobreviven las calculaciones. Estos son: R_{tt} , R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$. Cada una de estas componentes debe ser cero. Las ecuaciones que afirman esta igualdad son:

$$R_{tt} = e^{\mu-\lambda}\,[-\tfrac{1}{2}\mu'' + \tfrac{1}{4}\lambda'\mu' - \tfrac{1}{4}(\mu')^2 - \tfrac{\mu'}{r}] = 0$$

$$R_{rr} = \tfrac{1}{2}\mu'' - \tfrac{1}{4}\lambda'\mu' + \tfrac{1}{4}(\mu')^2 - \tfrac{\lambda'}{r} = 0$$

El término μ'' quiere decir doble medida de variación con respecto a (r) , $\mu'' = \frac{d(\frac{d\mu}{dr})}{dr}$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda}\left[1 - \tfrac{1}{2}r(\mu' - \lambda')\right] - 1 = 0$$

$$R_{\phi\phi} = sin^2\theta\,\{e^{-\lambda}\left[1 - \tfrac{1}{2}r(\mu' - \lambda')\right] - 1\} = 0$$

Los elementos $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$ son idénticos de manera que solamente tenemos 3 ecuaciones independientes. Comparando R_{tt} y R_{rr} nos damos cuenta que $\lambda' = -\mu'$. Esto quiere decir que $\lambda = -\mu$ + (constante). A medida que r crece de valor y se aproxima a valor infinito, λ y μ deben aproximarse a valor cero. Esto es porque $e^0 = 1$ y este es el valor asimptótico de λ y μ. De manera que la constante se debe ignorar. La conclusión es que $\lambda(r) = -\mu(r)$. En el siguiente paso substituimos $\lambda' = -\mu'$ en la ecuación del elemento $R_{\theta\theta}$. El resultado es: $e^{\boldsymbol{\mu}}$ **(1 + rμ') = 1**

La expresión al lado izquierdo de la igualdad no es nada más que la derivativa de $r.e^{\mu}$. Entonces $\frac{d}{dr}(re^{\mu}) = e^{\mu}(1 + r\mu') = 1$. Quiere decir entonces que:

$r.e^{\boldsymbol{\mu}} = r + 2m$ en donde (2m) es una constante de integración. Esto nos lleva a $e^{\boldsymbol{\mu}} = 1+2m/r$

Los resultados de estas calculaciones son:

$$\lambda(r) = [1 - \tfrac{2m}{r}]$$

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

$$\mu(r) = \frac{1}{\left[1 - \frac{2m}{r}\right]}$$

LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN

La constante de integración la vamos a identificar usando las condiciones antecedentes al problema. Esto es usando la estipulación de que las fórmulas de la relatividad general en el límite se deben reducir a las expresiones Newtonianas. Esta coincidencia sucedería si $g_{tt} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ en donde "φ" es la energía potencial del campo gravitacional Newtoniano. De acuerdo con la ley de Newton, el potencial de una masa situada en el origen del sistema de coordinadas es φ = -G.M/R. Quiere decir entonces que "m" debe ser substituida por G.M/R. El resultado es entonces $g_{tt} \approx 1 + \frac{2GM}{c^2 r}$ y $m = \frac{G.M}{c^2}$. La constante "m" es conocida como la masa geométrica. Debemos explicar que el cuadrado de la velocidad de la luz aparece en esta fórmula porque estamos usando las unidades de la relatividad especial en las cuales la velocidad de la luz es unidad (=1).

Después de incorporar estos resultados en Fórmula 22, la Métrica de Schwarzschild y el Tensor Métrico toman la forma:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m}{r}\right] dt^2 - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2m}{r}\right]} - r^2[d\theta^2 + sin^2\theta \, d\varphi^2] \qquad \textbf{Fórmula 24}$$

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} [1 - \frac{2m}{r}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[1 - \frac{2m}{r}]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2\theta \end{vmatrix}$$

Inspeccionando la Metrica de Schwarzschild, Formula 24 vemos que a medida que "r" crece y se aproxima a infinito valor, g_{tt} y g_{rr} se aproximan al valor de unidad y la Métrica de Schwarzschild coincide con la Métrica de la Relatividad Especial, Fórmula 20.

EL RADIO DE SCHWARZSCHILD

También vemos que cuando r = 2m la métrica llega a ser singular. Es decir, es de valor indefinido porque el denominador de la fracción que representa g_{rr} es cero. Se dice entonces que a medida que el valor de r se aproxima a 2m

g_{rr} crece y tiene valor asimptótico de infinito lo que causa que el Tensor Métrico llegue a ser cero. Aparentemente el valor r = 2m representa una "singularidad." El valor r = 2m se conoce como el radio Schwarzschild.

$$r_s = 2m = 2\frac{G.M}{c^2}$$

En el caso de estrellas ordinarias r_s se encuentra adentro de la estrella, asi, que tenemos confianza de que la Métrica de Schwarzschild se puede usar en el espacio alrededor de la estrella (no existen singularidades afuera). Por ejemplo, usando la masa del sol ($1.989x10^{30}$ kg) en la fórmula de r_s nos encontramos que el radio de schwarzschild es aproximadamente 3 Kilómetros. En realidad se ha investigado si el Radio de Schwarzschild representa una singularidad o si es un artefacto de las coordinadas que usamos El resultado de esta investigación nos dice que el radio de Schwarzschild no representa una singularidad. La verdadera singularidad se encuentra en r = cero que es el origen del sistema de coordenadas.

GEODÉSICOS EN EL ESPACIO DE SCHWARZSCHILD

Ahora ya estamos en posición de formular las ecuaciones de los geodésicos. Todo lo que necesitamos son los símbolos de Chrisoffel (ya los calculamos) y el Tensor Métrico. Desafortunadamente hemos llegado al final de nuestra excursión en la Relatividad. He guiado a mis queridos lectores al vestíbulo de la Ciencia Relativista y hay un mundo que explorar adentro del portal. En lo que queda de este capítulo vamos a escribir un par de ecuaciones que representan órbita alrededor de un cuerpo masivo. Vamos a hacer una pequeña comparación con las ecuaciones de Newton y finalmente vamos a dar una pequeña descripción de lo que ocurre alrededor de un cuerpo estelar compacto como los White Dwarf (perdonen el solecismo), una estrella de neutrones y agujeros negros.

La ecuación de geodésicos es Formula 19 y la vamos a reproducir aquí:

$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \binom{i}{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$ $x^1 = t$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$, $x^4 = \varphi$.

For $x^3 = \theta$, $\frac{d^2\theta}{ds^2} + \binom{\theta}{r\theta}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \binom{\theta}{\theta r}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} + \binom{\theta}{\phi\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2\gamma}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \gamma r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \gamma r\, sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d\gamma}{dr}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}$$

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$, gamma (γ) representa g_{tt}

Estas son las 4 ecuaciones de geodésicos. Sabemos que las órbitas son planas de manera que la ecuación de la variable "θ" se reduce a "θ" = constante. Escogemos θ = π/2. Como ven las ecuaciones ahora son mucho más complejas y laboriosas. De manera que voy a evitar presentarles la manera cómo resolverlas. La solución es más fácil si uno toma ventaja de las simetrías que hay en el espacio de Schwarzschild. Por ejemplo el espacio lleva simetría esférica. Sin embargo, vamos comentar con respecto a cómo las ecuaciones de Newton se comparan a las ecuaciones de la Relatividad General.

La órbita ocurre en el plano θ = π/2. Usando u = 1/r la ecuación que refiere la distancia radial al ángulo φ es:

$\boldsymbol{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2}$ en donde $\boldsymbol{r^2\frac{d\phi}{ds} = h}$ (Einstein)

Estas 2 ecuaciones son suficiente para determinar la órbita. En comparación, usando la mecánica Newtoniana, las 2 ecuaciones que corresponden son:

$\boldsymbol{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{km_1}{h^2}}$ y $\boldsymbol{r^2\frac{d\phi}{ds} = h}$ (Newton).

COMPARACIÓN DE RESULTADOS CON LA MECÁNICA DE NEWTON

Comparando las ecuaciones de Einstein con las de la Mecánica Clásica (Newton) vemos que cuando hablamos de velocidades planetarias, dichas velocidades son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz en cuyo caso basta usar la expresión Newtoniana para la velocidad que es ds = dt. Por esta razón h es en ambos casos la velocidad sectorial de la órbita. La constante de integración que es "m" en el caso de Einstein corresponde a km_1 en el caso de Newton de manera que la diferencia se puede decir es solamente aparente. La diferencia real entre las 2 ecuaciones es el término ($3mu^2$). Podemos decir categóricamente que la solución de Einstein introduce un término de corrección a la ecuación de Newton y este es ($3mu^2$).

La pregunta es: Qué fracción del término (m/h^2) representa el término de corrección? La respuesta es $3r^2(d\varphi/ds)^2$. Podemos hacer una estimación de la magnitud de esta fracción usando radio de la órbita terrestial (average) que es $1.5x10^{11}$ metros, la velocidad angular de la órbita que es $d\varphi/dt = 2x10^{-7}$ rad/segundo y dt/ds que es $1/c = 1/3x10^8$ metros por segundo. El resultado es que el término de corrección es de orden $1x10^{-8}$. El efecto de esta corrección es imperceptible en lo que se refiere a orbitas de planetas ordinarios, pero en el

© George G. Cuevas – george_cuevas197@hotmail.com

caso de Mercurio este término de corrección afecta el avance del Perihelio. El avance del Perihelio se puede calcular usando métodos de perturbación y el ángulo de avance es $6m^2\pi/h^2$ radianes por cada revolución. Esta es una cantidad imperceptible para los planetas en el sistema solar con excepción de Mercurio cuyo período de órbita es solamente 88 días. Para el planeta Mercurio, el avance del Perihelio es de 42″ de arco cada 100 años comparado con el avance del Perihelio de Venus que 9″ y con el de la Tierra que es 4″. Debemos notar que el avance del Perihelio de Mercurio ha sido causa de consternación para el mundo científico porque la Mecanica Clásica no puede explicar este fenómeno. Sin embargo, el avance del Perihelio de Mercurio se puede calcular usando el término de corrección de la Mecánica de Einstein. Llevando a cabo dicha calculación, el resultado es 41″ por cada 100 años que es casi exacto a la cantidad medida en el último centenar de años.

TRAYECTORIA DE PARTÍCULAS SIN MASA

Anteriormente dijimos que partículas que tienen masa llevan su línea del mundo adentro de las paredes del cono del futuro. La distancia de un punto a otro se calcula sumando los infinitésimos intervalos dτ en la manera indicada en Figura 23, $\int_A^B ds$. Cuando presentamos la definición matemática de un geodésico, dijimos que el geodésico representa el valor extremo de la distancia del intervalo, $\int_A^B \sqrt{g_{ab}\, dx^a dx^b}$. Este proceso dijimos que viene del Cálculo de variación y aquí postulamos que partículas de masa llevan la trayectoria de un geodésico. Cuando hablamos de ondas electromagnéticas (la luz) que consiste de partículas que no llevan masa, la línea del mundo de fotones se desarrolla en las paredes del cono del futuro. Aquí el intervalo es cero y el proceso de hallar valor extremo al intervalo falla a menos que cambiemos de táctica. Necesitamos la ayuda de vectores "nulos." Esto quiere decir que son vectores de magnitud cero. El nuevo proceso que hay que usar voy a describirlo simplemente ya que explicación está fuera de la materia que estamos estudiando. El proceso se llama "Derivativa de Lie" y tiene como objetivo medir la variación de un vector de un punto a otro en una dirección fija. Aquí hablamos de la variación del Tensor Métrico en la dirección del vector nulo. Si hallamos que la variación del Tensor Métrico en dicha dirección es cero, esto significa que el Vector nulo representa una cantidad conservada $L_\kappa g = 0$. De acuerdo con él Teorema de Noether, simetrías dan lugar a leyes de conservación. Cada vector nulo que satisface la relación $L_\kappa g = 0$ se refiere una cantidad que es conservada. El espacio de Minkowski, o sea el espacio de Lorentz contiene 4 simetrías de translación correspondiendo a las 4 coordinadas y 6 simetrías de rotación que correspondes a conservación de momento y de momento angular. Los vectores nulos son conocidos también como "Killing Vectors"

No. 116 – Diciembre 2017 – ISSN 2164-4268 - http://www.temasnicas.net/

El hecho de que $L_\kappa g = 0$ (la derivativa de Lie sea cero) quiere decir que el vector que representa la cantidad conservada puede desplazarse sobre el geodésico nulo paralelamente a sí mismo de manera que el vector no cambia al moverse de un punto a otro. Una partícula que se desplaza en la dirección en la cual el Tensor Métrico no cambia, quiere decir que dicha partícula no está sujeta a fuerza alguna. Es relativamente fácil identificar cantidades que se conservan y así dar con el Killing Vector que corresponde. Este proceso se puede utilizar para escribir ecuaciones de geodésicos nulos y así identificar la trayectoria de rayos de luz (fotones). Es posible entonces escribir la trayectoria de un rayo de luz en la proximidad de un cuerpo masivo y así calcular la deflección que el cuerpo masivo induce en el rayo de luz. Es también posible escribir la ecuación de la trayectoria de un rayo de luz en proximidad a un cuerpo masivo y así calcular la demora causada por la trayectoria curva en comparación con una trayectoria rectilínea. Esto no lo vamos a enseñar aquí porque las matemáticas son un poco pesadas.

CUERPOS ESTELARES MASIVOS

Cuerpos astronómicos masivos de masa comparable al sol pero mucho más compactos y de menor tamaño existen en el universo. Lo que llamamos a White Dwarf es una estrella de masa equivalente a la masa solar y con radio de 5,000 Kilómetros (el radio terrestre es de 6371 Kilómetros). La densidad de un White Dwarf es entonces 10^9 Kilogramos por cada metro cúbico. Sabemos que White Dwarfs son estrellas que han agotado su fuente de energía y quietamente flotan en el espacio en su nuevo estado de reposo. Sabemos también que los electrones y núcleos adentro de este tipo de estrella no forman átomos pero los núcleos flotan en un mar de electrones. La presión interna del océano de electrones mantiene el tamaño y no permite que el tamaño colapse a menor volumen. Se dice que la masa de un White Dwarf no puede ser en exceso de 1.4 la masa del sol. Si fuera más grande la presión interna no podría soportar el peso y el volumen de la estrella sufriría un colapso. Los núcleos y electrones se combinarían para formar neutrones y el White Dwarf llegaría a ser entonces una estrella de neutrones.

Las estrellas de neutrones llevan la misma densidad que un núcleo, esto es 10^{17} Kilogramos por metro cúbico. Se dice que un cubo de 400 metros de lado es equivalente a la masa del Planeta Tierra. El radio de una estrella de neutrones es de aproximadamente 10 Kilómetros. El origen de las estrellas de neutrones viene de explosiones de Supernovas. Inmediatamente después de la explosión de una Supernova, viene el colapso y el estado final puede ser una estrella de neutrones o puede llegar a ser un agujero negro. Sabemos que las estrellas de

© George G. Cuevas – george_cuevas197@hotmail.com

neutrones giran y al mismo tiempo dan lugar a campos magnéticos de fuerte intensidad. Cuando el campo magnético está alineado de manera que también gira con la rotación de la estrella, este campo magnético barre a través del espacio y excita las nubes de plasma que existen en los alrededores. Esto causa que el plasma emita pulsos de energía electromagnética que son detectados aquí en la Tierra. De aquí viene el nombre de "Pulsar" que se les ha aplicado a estrellas de neutrones.

Los agujeros negros ocurren cuando una estrella masiva explota y seguidamente sufre contracción a un volumen tan pequeño que la misma curvatura del espacio no permite el escape de radiación electromagnética (luz) y materia. El interior de este cuerpo permanece aislado del resto del universo. Agujeros generalmente tienen masa equivalente mínima de 3 veces la masa solar. Con respecto a la máxima cantidad de masa, no hay límite. El tamaño puede ser de 9 Kilómetros de radio (agujeros pequeños). Se estima que estrellas de neutrones con masa en exceso a 2 masas solares no son capaces de soportar su propio peso y se convierten an agujeros negros. Con esta descripción de cuerpos masivos estelares, vamos a hablar un poco de la singularidad (r = 2m) en el espacio de schwarzschild.

QUITANDO LA SINGULARIDAD DEL PUNTO R = 2M

Habíamos dicho anteriormente que a distancia radial equivalente al radio de Schwartzschild el elemento del Tensor Métrico g_{tt} = 0 y rl rlrmrnto g_{rr} se aproxima a valor infinito. Sin embargo, habíamos dicho también que otros efectos que notamos, por ejemplo, el Tensor Métrico se reduce a cero pueden ser artefactos debidos al tipo de coordinadas que estábamos usando Habíamos quedado en que había que cambiar coordinadas y determinar el carácter de esta irregularidad. Vimos también que el radio de schwarzschild no representa una genuina irregularidad. La verdadera irregularidad ocurre cuando r = 0. Sin embargo, todavía tenemos que establecer qué pasa cuando r =2m.

Usando las coordinadas de Eddington-Finkelstein es posible observar qué sucede cuando r=2m. Para este fin, la trayectoria de un rayo de luz fue establecida y allí vimos que el Tensor Métrico no llega a ser cero cuando r = 2m. Esto quiere decir que la irregularidad era debida al tipo de coordinadas. Sin embargo observamos que cuando r = 2m:

- La superficie r = 2m constituye una membrana de tráfico en una sola dirección que se llama "Horizonte de Acción." Es posible cruzar esta membrana para líneas del mundo que van en dirección al futuro y que se extienden desde r > 2m hacia r < 2m. No se puede cruzar en la dirección opuesta. Hechos que ocurren adentro del Horizonte de Acción no pueden ser vistos por observadores afuera.

- A medida que uno se mueve en la dirección de r < 2m el cono del futuro comienza a inclinarse en dirección de r = 0
- Cuando r = 2m fotones no se mueven y permanecen fijos.
- Para valores de r < 2m líneas del mundo que van hacia el futuro apuntan en dirección de r = 0. Favor referirse a la Figura 25.
- Para regiones $2m < r < \infty$ y $-\infty < t < \infty$ las coordinadas de Schwarzschild son adecuadas para describir la geometría. Para r = 2m y regiones en el interior del Horizonte de acción, otro sistemas de coordinadas debe ser usado.

El concepto de agujeros negros es muy interesante. Hay numerosos libros en esta materia y quiero mencionar cómo referencia *Exploring Black Holes: An Introduccion to General Relatibity by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler*, Addison Wesley, 2000.

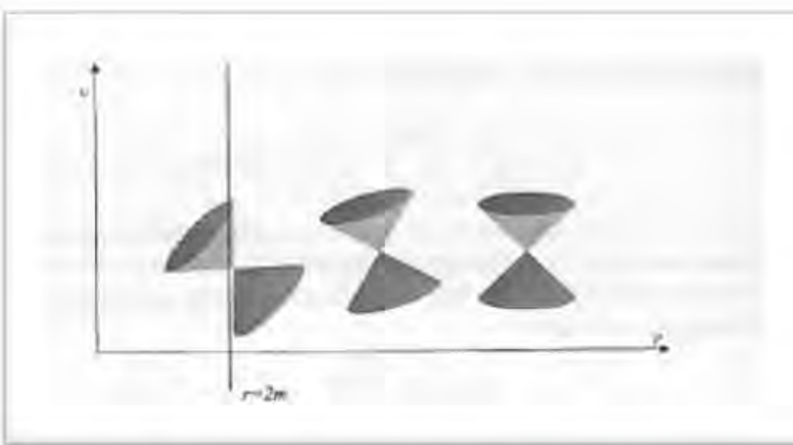

Figure 25. Usando las coordinadas de Eddington-Finkelstein extrae la singularidad que odurría en el punto r = 2m. A medida que r disminuye los conos en cuyas paredes viaja la luz se comienzan a inclinar hacia valores de r de menor tamaño. Cuando se llega al punto r = 2m todos los Geodésicos hacia el futuro apuntan en dirección de r = 0.

[1] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. – *Spacetime Physics*. Second Edition. W. H. Freeman. New York 1992

© George G. Cuevas – george_cuevas197@hotmail.com

[2] Roger Penrose. *The Road to Reality*. – Published by Vintage Books, A division of Random House Inc. New York

[3] David Mc Mahon, *relativity DeMYSTiFieD.* McGraw-Hill 2006

[4] David Lovelock and Hanno Rurid. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles.* Dover Publicacions Inc. New York.

[5] I. S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Inc. New York.■